

Realized Stochastic Volatility モデル -日次リターンと Realized Volatility の 同時モデル化-

大森裕浩¹・渡部敏明²

統計関連学会連合大会

2012年9月10日

¹東京大学大学院経済学研究科

²一橋大学経済研究所

ボラティリティの推定法

▶ 過去のリターンから

1. HV
2. GARCH, SV (渡部, 2000; Watanabe and Omori, 2004; Omori et al., 2007; Omori and Watanabe, 2008)
3. RV (渡部, 2007)
4. SV+RV (Takahashi, Omori and Watanabe, 2009)

▶ オプション価格から

1. BSIV
2. MFIV or VIX (Jiang and Tian, 2005, 2007; 山口, 2008; 杉原, 2009; Fukasawa et al., 2011)

RV

- ▶ 以下, $t-1$ を第 $t-1$ 日の最終時点, t を第 t 日の最終時点とする.
- ▶ 第 t 日の日中の n 個のリターン

$$\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \dots, r_t\}$$

が与えられているとすると, 第 t 日の日次 RV は次のように計算される.

$$RV_t = \sum_{i=1}^n r_{t-1+i/n}^2$$

- ▶ 資産価格の対数値 $p(s)$ が拡散過程

$$dp(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s)$$

に従っているものとする、第 t 日の真のボラティリティは次のように定義される。

$$\sigma_t^2 = \int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds$$

- ▶ $n \rightarrow \infty$ とすると、 RV_t は σ_t^2 に確率収束する。

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} RV_t = \sigma_t^2$$

RVの問題点

1. MS ノイズ

- ▶ bid-ask bounce, 非同期取引等
- ▶ Campbell, Lo and Mackinlay (1997) Chapter 3.
- ▶ MS ノイズを考慮した RV の計算法
 - (1) 最適な時間間隔の選択 (Aït-Sahalia, Mykland and Zhang, 2005; Bandi and Russell, 2006, 2008)
 - (2) Two (multi) Scale Estimator (Zhang, Mykland and Aït-Sahalia, 2005; Zhang, 2006)
 - (3) Realized kernel (Barndorff-Nielsen et al., 2008, 2009)
 - (4) 比較 (Bandi, Russell and Yang, 2008; Ubukata and Watanabe, 2012)

2. Non-trading hours

- ▶ Hansen and Lunde (2005a, b)

日次リターンとRVの同時モデル化

- ▶ なぜ同時モデル化が必要か?
 - ▶ MS ノイズや Non-trading hours によって RV に生じるバイアスの調整.
 - ▶ リターンの式とボラティリティの式のパラメータの同時推定 (2 段階推定: Giot and Laurent, 2004; 渡部・佐々木, 2006).
- ▶ Realized SV
 - ▶ Takahashi, Omori and Watanabe (2009)
 - ▶ Dobrev and Szerszen (2010)
 - ▶ Koopman and Scharth (2012)
- ▶ Realized GARCH
 - ▶ Hansen, Huang and Shek (2012)
 - ▶ Watanabe (2012)
 - ▶ Takeuchi-Nogimori (2012)

Notation

- ▶ r_t = 日次リターン
- ▶ h_t = 真のボラティリティの対数值

SV モデル

$$r_t = \exp(h_t/2)\epsilon_t,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}.$$

MCMC を用いたベイズ推定

- ▶ $\theta = (\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu)$, $r = \{r_t\}_{t=1}^n$, $h = \{h_t\}_{t=1}^n$.
- ▶ 以下の Gibbs sampler により事後分布 $\theta, h|r$ からサンプリングできる.
 0. θ, h を初期化.
 1. $\phi|\sigma_\eta, \rho, \mu, h, r$ からサンプリング.
 2. $(\sigma_\eta, \rho)|\phi, h, r$ からサンプリング.
 3. $\mu|\phi, \sigma_\eta, \rho, h, r$ からサンプリング.
 4. $h|\theta, r$ からサンプリング.
 5. 1 に戻る.

$h|\theta, r$ からのサンプリング

(1) Single-move sampler

- ▶ Jacquier, Polson and Rossi (1994, 2004)
- ▶ $h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, r$ ($t = 1, \dots, n$) からサンプリング.
- ▶ h は自己相関が高いので (ボラティリティ・クラスタリング), この方法は非効率.

(2) Mixture sampler

- ▶ Kim, Shephard and Chib (1998), Omori et al. (2007)
- ▶ $h|\theta, r$ ($t = 1, \dots, n$) からサンプリング.
- ▶ SV モデルを以下の非ガウス線形状態空間モデルで表す.

$$\ln(r^2) = h_t + \ln(\epsilon_t^2)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t$$

- ▶ $\ln(\epsilon_t^2)$ の分布を混合正規分布で近似.

(3) Multimove sampler (Block sampler)

- ▶ Shephard and Pitt (1998), Watanabe and Omori (2004), Omori and Watanabe (2008)
- ▶ (h_1, \dots, h_n) をいくつかのブロックに分けて, 1 つのブロックを一度にサンプリングする.
- ▶ $(h_{s+1}, \dots, h_{s+m-1})$ を一つのブロックとすると, $(h_{s+1}, \dots, h_{s+m-1} | h_s, h_{s+m+1}, r)$ から直接サンプリングする代わりに, 誤差項 $(\eta_s, \dots, \eta_{s+m})$ を $(\eta_s, \dots, \eta_{s+m}) | h_s, h_{s+m+1}, r$ からサンプリングする.
- ▶ ブロックは毎回確率的に選択する (stochastic knots).

SV モデル: Mixture sampler

Kim, Shephard and Chib (1998): $\epsilon_t^* = \log(\epsilon_t^2)$ の分布を混合正規分で近似.

$$g(\epsilon_t^*) = \sum_{j=1}^K p_j f_N(\epsilon_t^* | m_j, v_j^2)$$

Omori, Chib, Shephard and Nakajima (2007): $\rho \neq 0$ のモデルに拡張.

$$\eta_t | \theta, \delta_t, \epsilon_t^* \sim N(\delta_t \rho \sigma_\eta \exp(\epsilon_t^*/2), \sigma_\eta^2(1 - \rho^2)).$$

ただし, $\delta = I(r_t \geq 0) - I(r_t < 0)$. (ϵ_t^*, η_t) の同時確率密度を以下で近似.

$$g(\epsilon_t^*, \eta_t | \theta, \delta_t) = \sum_{j=1}^K p_j f_N(\epsilon_t^* | m_j, v_j^2) \\ \times f_N[\eta_t | \delta_t \rho \sigma_\eta \exp(m_j/2) \{a_j + b_j(\epsilon_t^* - m_j)\}, \sigma_\eta^2(1 - \rho^2)].$$

SV モデル: Mixture sampler

	$K = 10$				
j	p_j	m_j	v_j^2	a_j	b_j
1	0.00609	1.92677	0.11265	1.01418	0.50710
2	0.04775	1.34744	0.17788	1.02248	0.51124
3	0.13057	0.73504	0.26768	1.03403	0.51701
4	0.20674	0.02266	0.40611	1.05207	0.52604
5	0.22715	-0.85173	0.62699	1.08153	0.54076
6	0.18842	-1.97278	0.98583	1.13114	0.56557
7	0.12047	-3.46788	1.57469	1.21754	0.60877
8	0.05591	-5.55246	2.54498	1.37454	0.68728
9	0.01575	-8.68384	4.16591	1.68327	0.84163
10	0.00115	-14.65000	7.33342	2.50097	1.25049

SV モデル: Mixture sampler

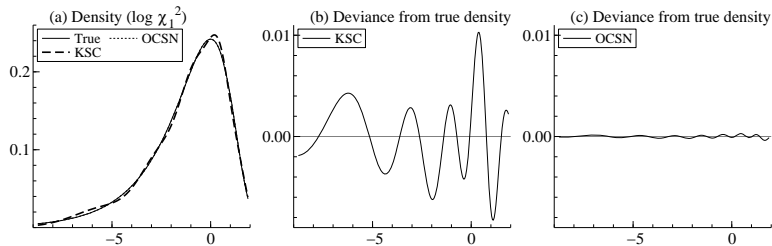


Figure: $\log \chi_1^2$ の確率分布を混合正規分布により近似

- ▶ 混合正規分布の成分 s_t を潜在変数とする
- ▶ s_t を所与とすれば, 線形ガウス状態空間表現
- ▶ Augmented Kalman filter (de Jong (1991)), simulation smoother を利用
- ▶ 効率性が非常に高い推定方法

SV モデル: Multi-move sampler

Omori and Watanabe (2008) CSDA

1. $\{\alpha_t\}_{t=1}^n = \{h_t - \mu\}_{t=1}^n$ をいくつかのブロックに分割
2. 条件付き事後分布を線形ガウス状態空間モデルから得られる事後分布で近似し、そのモードを求める
3. 誤差項 $\eta = (\eta_{k_{i-1}}, \dots, \eta_{k_i})$ をサンプリングし、 α は Recursive に求める

条件付き事後密度関数:

$$f(\eta_s, \dots, \eta_{s+m-1} | \alpha_s, \alpha_{s+m+1}, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}) \\ \propto \prod_{t=s}^{s+m} f(\mathbf{y}_t | \alpha_t, \alpha_{t+1}) \prod_{t=s}^{s+m-1} f(\eta_t), \quad s+m < n,$$

$$f(\eta_s, \dots, \eta_{s+m-1} | \alpha_s, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}) \\ \propto \prod_{t=s}^{s+m-1} f(\mathbf{y}_t | \alpha_t, \alpha_{t+1}) \prod_{t=s}^{s+m-1} f(\eta_t), \quad s+m = n,$$

SV モデル: Multi-move sampler

$\mathbf{u} = (\eta_s, \dots, \eta_{s+m-1}) / \sigma_\eta$ の条件付確率密度関数の対数値は定数項を除いて

$$f(\mathbf{u}_s, \dots, \mathbf{u}_{s+m-1} | \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_{s+m+1}, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}) \\ \propto -\frac{1}{2} \sum_{t=s}^{s+m-1} \mathbf{u}'_t \mathbf{u}_t + L,$$

ただし

$$L = \begin{cases} \sum_{t=s}^{s+m} l_s - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_{s+m+1} - \Phi \boldsymbol{\alpha}_{s+m})' \Sigma_{\eta\eta}^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_{s+m+1} - \Phi \boldsymbol{\alpha}_{s+m}), \\ \quad s + m < n \text{ のとき} \\ \sum_{t=s}^{s+m} l_s, \\ \quad s + m = n \text{ のとき} \end{cases}$$

SV モデル: Multi-move sampler

L を近似するために以下を求める

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}'_{s+1}, \dots, \mathbf{d}'_{s+m})', \mathbf{d}_t = \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha'_t} \right)', t = s+1, \dots, s+m,$$

$$A_t = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_t \partial \alpha'_t} \right], t = s+1, \dots, s+m,$$

$$B_t = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_t \partial \alpha'_{t-1}} \right], t = s+1, \dots, s+m, B_{s+1} = O$$

$$Q = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \alpha'} \right] = \begin{pmatrix} A_{s+1} & B'_{s+2} & O & \dots & O \\ B_{s+2} & A_{s+2} & B'_{s+3} & \dots & O \\ O & B_{s+3} & A_{s+3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B'_{s+m} \\ O & \dots & O & B_{s+m} & A_{s+m} \end{pmatrix},$$

SV モデル: Multi-move sampler

L をモード \hat{u} で展開

$$\begin{aligned} & \log f(\mathbf{u}_s, \dots, \mathbf{u}_{s+m-1} | \boldsymbol{\alpha}_s, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{s+m+1}, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}) \\ \approx & \text{const} - \frac{1}{2} \sum_{t=s}^{s+m-1} \mathbf{u}'_t \mathbf{u}_t + \hat{L} + \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}'} \right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})' \mathbb{E} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}'} \right) (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \\ = & \text{const} - \frac{1}{2} \sum_{t=s}^{s+m-1} \mathbf{u}'_t \mathbf{u}_t + \hat{L} + \hat{d}' (\boldsymbol{\alpha}^\dagger - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger) \\ & - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}^\dagger - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger)' \hat{Q} (\boldsymbol{\alpha}^\dagger - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger) \\ = & \text{const} + \log f^*(u, \dots, u_{s+m-1} | \boldsymbol{\alpha}_s, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{s+m+1}, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}) \end{aligned}$$

ただし $\hat{d}_t, \hat{A}_t, \hat{B}_t$ は d_t, A_t, B_t をそのモードで評価.

SV モデル: Multi-move sampler

逆行列の計算の次元を落とすために以下を計算

- ▶ $D_{s+1} = \hat{A}_{s+1}$
- ▶ $D_t = \hat{A}_t - \hat{B}_t D_{t-1}^{-1} \hat{B}'_t, t = s + 2, \dots, s + m$
- ▶ K_t : D_t のコレスキー分解 ($D_t = K_t K'_t$)

補助変数 $\hat{y}_t = \hat{y}_t + D_t^{-1} b_t$ ($s + 1 \leq t \leq s + m$) を定義. ただし

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_t + D_t^{-1} \hat{B}'_{t+1} \hat{\alpha}_{t+1} \quad (\hat{y}_{s+m} = \hat{\alpha}_{s+m})$$

$$b_t = \hat{d}_t - \hat{B}_t D_{t-1}^{-1} b_{t-1} \quad (b_{s+1} = \hat{d}_{s+1})$$

とすると線形ガウス状態空間表現が得られる。

SV モデル: Multi-move sampler

線形ガウス状態空間表現

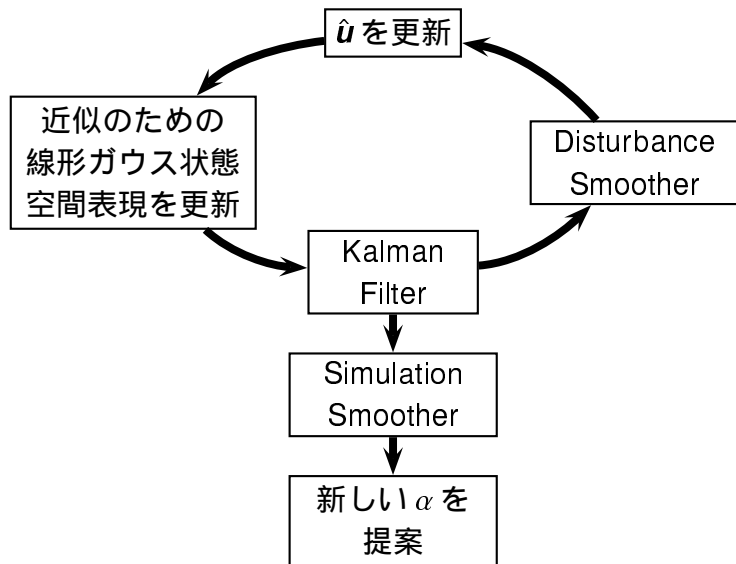
$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= Z_t \alpha_t + G_t \xi_t \\ \alpha_{t+1} &= \phi \alpha_t + H_t \xi_t \\ \xi_t &= (\epsilon'_t, u'_t)' \sim N(0, I)\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}Z_t &= 1 + D_t^{-1} \hat{B}'_{t+1} \phi \\ G_t &= [K_t'^{-1}, D_t^{-1} \hat{B}'_{t+1} \sigma_\eta] \\ H_t &= [O, \sigma_\eta]\end{aligned}$$

このモデルに基づく誤差項の事後分布を MCMC における提案分布とすることができる。

SV モデル: Multi-move sampler



Realized SV モデル

Notation

- ▶ r_t = 日次リターン
- ▶ h_t = 真のボラティリティの対数値
- ▶ x_t = RV の対数値

Realized SV model

$$r_t = \exp(h_t/2)\epsilon_t,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,$$

$$x_t = \xi + h_t + u_t,$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \\ u_t \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta & 0 \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix}.$$

MCMC を用いたベイズ推定

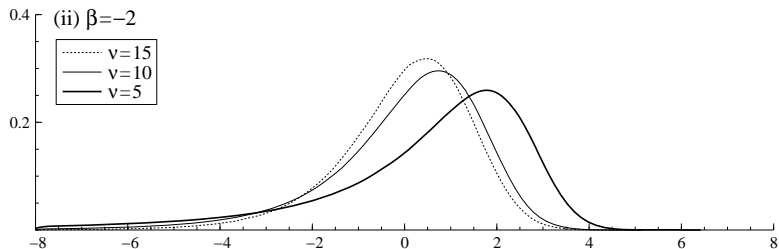
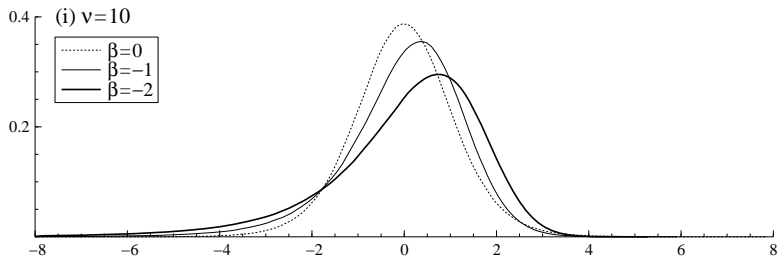
- ▶ $\theta = (\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \xi, \sigma_u)$, $y = \{r_t, x_t\}_{t=1}^n$, $h = \{h_t\}_{t=1}^n$.
- ▶ 以下のサンプリングを繰り返すことにより, 事後分布 $\theta, h|y$ からサンプリングする.
 0. θ, h を初期化.
 1. $\phi|\sigma_\eta, \rho, \mu, \xi, \sigma_u, h, y$ からサンプリング.
 2. $\sigma_\eta, \rho|\phi, \mu, \xi, \sigma_u, h, y$ からサンプリング.
 3. $\mu|\phi, \sigma_\eta, \rho, \xi, \sigma_u, h, y$ からサンプリング.
 4. $\xi|\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \beta, \nu, \sigma_u, h, y$ からサンプリング.
 5. $\sigma_u|\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \beta, \nu, \xi, h, y$ からサンプリング.
 6. $h|\theta, y$ からサンプリング.
 7. 1 に戻る.
- ▶ Takahashi, Omori and Watanabe (2009).

一般化双曲型非対称 t 分布

- ▶ $\epsilon_t \sim N(0, 1)$
- ▶ $z_t \sim IG(\nu/2, \nu/2)$
- ▶ ϵ_t と z_t が互いに独立.
- ▶ $\mu_z = E[z_t] = \nu/(\nu - 2)$
- ▶ このとき, $\beta(z_t - \mu_z) + \sqrt{z_t}\epsilon_t$ の分布を一般化双曲型 (GH) 非対称 t 分布と呼ぶ.
- ▶ $\beta = 0$: t 分布
- ▶ $\beta = 0, \nu \rightarrow \infty (z_t = 1)$: 標準正規分布
- ▶ $r_t = \exp(h_t/2) \{\beta(z_t - \mu_z) + \sqrt{z_t}\epsilon_t\}$
- ▶ Prause (1999), 増田 (2002), Aas and Haff (2006), 中島・大森 (2010), Nakajima and Omori (2012).

Realized SV モデルの拡張

GH 非対称 t 分布の密度関数の例



MCMC を用いたベイズ推定

- ▶ $\theta = (\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \xi, \sigma_u)$, $y = \{r_t, x_t\}_{t=1}^n$, $h = \{h_t\}_{t=1}^n$,
 $z = \{z_t\}_{t=1}^n$.
- ▶ 以下のサンプリングを繰り返すことにより, 事後分布 $\theta, h, z|y$ からサンプリングする.
 0. θ, h , and z .
 1. $\phi|\sigma_\eta, \rho, \mu, \xi, \sigma_u, h, z, y$ からサンプリング.
 2. $(\sigma_\eta, \rho)|\phi, \mu, \xi, \sigma_u, h, z, y$ からサンプリング.
 3. $\mu|\phi, \sigma_\eta, \rho, \xi, \sigma_u, h, z, y$ からサンプリング.
 4. $\xi|\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \beta, \nu, \sigma_u, h, z, y$ からサンプリング.
 5. $\sigma_u|\phi, \sigma_\eta, \rho, \mu, \beta, \nu, \xi, h, z, y$ からサンプリング.
 6. $z|\theta, h, y$ からサンプリング.
 7. $h|\theta, z, y$ からサンプリング.
 8. 1 に戻る.
- ▶ Takahashi, Omori and Watanabe (2012).

ボラティリティの予測, VaR, ES

- ▶ 以下のステップを加えることにより, $n+1$ 日のボラティリティやリターンをサンプリングできる.

- i. $h_{n+1}|\theta, h, z, y \sim N(\mu_{n+1}, \sigma_{n+1}^2)$ からサンプリング.
ただし,

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} &= \mu + \phi(h_n - \mu) \\ &\quad + z_n^{-1/2} \exp(-h_n/2) \rho \sigma_\eta \{r_n - \beta \bar{z}_n \exp(h_n/2)\}, \\ \sigma_{n+1}^2 &= (1 - \rho^2) \sigma_\eta^2.\end{aligned}$$

- ii. $z_{n+1} \sim IG(\nu/2, \nu/2)$ からサンプリング.
- iii. $r_{n+1}|\theta, h_{n+1}, z_{n+1} \sim N(\hat{\mu}_{n+1}, \hat{\sigma}_{n+1}^2)$ からサンプリング.
ただし,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{n+1} &= \beta(z_{n+1} - \mu_z) \exp(h_{n+1}/2), \\ \hat{\sigma}_{n+1}^2 &= z_{n+1} \exp(h_{n+1}).\end{aligned}$$

- iv. $x_{n+1}|\theta, h_{n+1} \sim N(\xi + \psi h_{n+1}, \sigma_\eta^2)$ からサンプリング.

ボラティリティの予測

- ▶ $E[\exp(h_{n+1})|\mathcal{I}_n]$ はサンプリングされた $\exp(h_{n+1})$ の値の標本平均として計算できる.

VaR

- ▶ $\Pr[r_{n+1} < \text{VaR}_{n+1}(\alpha)|\mathcal{I}_n] = \alpha.$

ES

- ▶ $\text{ES}_{n+1}(\alpha) = E[r_{n+1}|r_{n+1} < \text{VaR}_{n+1}(\alpha), \mathcal{I}_n].$
- ▶ 山井・吉羽 (2001)

VaR の計算法

- ▶ VaR_{n+1} はサンプリングされた r_{n+1} の値の α -percentile として求められる.

ES の計算法

- ▶ $\text{ES}_{n+1}(\alpha)$ はサンプリングされた r_{n+1} の中で $r_{n+1} < \text{VaR}_{n+1}(\alpha)$ を満たすサンプルの標本平均として求められる.

Takahashi, Omori and Watanabe (2012)

- ▶ Spyder (S&P 500 exchange-traded fund)
- ▶ 2001/2/1–2008/8/29.
- ▶ 1分ごとの日中リターンを用いてRVとRK (Barndorff-Nielsen et al., 2008, 2009) を計算.
- ▶ 夜間は無視.
- ▶ 予測期間
 - ▶ Low volatility period: 2005/2/11–2006/12/29.
 - ▶ High volatility period: 2007/1/3–2008/8/29.

パラメータの推定結果

Realized SV モデル (GH 非対称 t 分布, RK)

サンプル期間: 2001/2/1–2005/2/10

サンプルサイズ: 1,000

	Mean	Stdev.	95%L	95%U	CD	lnef.
ϕ	0.9759	0.0065	0.9629	0.9884	0.238	2.16
σ_{η}	0.1643	0.0075	0.1504	0.1796	0.812	9.55
ρ	-0.3850	0.0529	-0.4864	-0.2802	0.041	12.26
μ	-0.1652	0.2191	-0.5991	0.2741	0.694	3.19
β	0.5647	0.6460	-0.7901	1.8300	0.375	104.53
ν	24.1302	5.2360	15.4345	35.4438	0.248	125.85
ξ	0.0127	0.0509	-0.0800	0.1184	0.834	59.00
σ_u	0.2661	0.0084	0.2505	0.2834	0.765	4.08

パラメータの推定結果

Realized SV モデル (GH 非対称 t 分布, RK)

サンプル期間: 2001/2/1–2005/2/10

サンプルサイズ: 1,000

	Mean	Stdev.	95%L	95%U	CD	Inef.
ϕ	0.9716	0.0069	0.9574	0.9848	0.550	2.29
σ_{η}	0.1761	0.0085	0.1601	0.1939	0.072	8.56
ρ	-0.4350	0.0542	-0.5362	-0.3230	0.551	11.63
μ	0.0056	0.1903	-0.3712	0.3811	0.356	3.45
β	0.1308	0.3126	-0.4947	0.7448	0.730	22.97
ν	27.1193	4.9390	18.2402	37.9927	0.074	51.66
ξ	-0.3134	0.0470	-0.4098	-0.2239	0.378	28.32
σ_u	0.3101	0.0094	0.2929	0.3295	0.434	2.26

VaR (failure rates, low volatility period)

Model	RM	1%	5%	10%
SVn		0.0021	0.0297	0.0488
SVt		0.0042	0.0255	0.0552
SVskt		0.0021	0.0276	0.0637
RSVn	<i>RV</i>	0.0127	0.0467	0.0913
RSVt	<i>RV</i>	0.0064	0.0467	0.0892
RSVskt	<i>RV</i>	0.0085	0.0425	0.0807
RSVn	<i>RK</i>	0.0085	0.0403	0.0786
RSVt	<i>RK</i>	0.0064	0.0403	0.0786
RSVskt	<i>RK</i>	0.0064	0.0403	0.0722

VaR (failure rates, high volatility period)

Model	RM	1%	5%	10%
SVn		0.0337	0.0771	0.1325
SVt		0.0289	0.0795	0.1446
SVskt		0.0217	0.0771	0.1398
RSVn	<i>RV</i>	0.0241	0.0651	0.1012
RSVt	<i>RV</i>	0.0120	0.0602	0.1012
RSVskt	<i>RV</i>	0.0120	0.0578	0.1012
RSVn	<i>RK</i>	0.0217	0.0699	0.1060
RSVt	<i>RK</i>	0.0169	0.0675	0.1036
RSVskt	<i>RK</i>	0.0145	0.0675	0.1036

VaR の尤度比検定

- ▶ VaR violation に対する仮定
 - ▶ Kupiec (1995): 独立
 - ▶ Christoffersen (1998): マルコフ過程
 - ▶ Christoffersen and Pelletier (2004): 持続時間 (duration) がワイブル分布もしくはは Engle and Russell (1998) の exponential autoregressive conditional duration (EACD) モデルに従う.

VaR (p 値, low volatility period, $\alpha = 1\%$)

Model	RM	Markov	Weibull	EACD
SVn		0.0910*	.NaN	.NaN
SVt		0.2355	.NaN	.NaN
SVskt		0.0819*	.NaN	.NaN
RSVn	<i>RV</i>	0.6222	0.3211	0.7571
RSVt	<i>RV</i>	0.4966	0.2243	0.6414
RSVskt	<i>RV</i>	0.7881	0.2340	0.8037
RSVn	<i>RK</i>	0.7620	0.2387	0.8093
RSVt	<i>RK</i>	0.3925	0.2211	0.6459
RSVskt	<i>RK</i>	0.4234	0.2239	0.6357

VaR (p 値, low volatility period, $\alpha = 5\%$)

Model	RM	Markov	Weibull	EACD
SVn		0.0993*	0.2111	0.2538
SVt		0.0409**	0.4401	0.5239
SVskt		0.0683*	0.1385	0.3544
RSVn	<i>RV</i>	0.2693	0.9577	0.1757
RSVt	<i>RV</i>	0.2678	0.9606	0.1727
RSVskt	<i>RV</i>	0.5482	0.8936	0.1441
RSVn	<i>RK</i>	0.3748	0.5349	0.1367
RSVt	<i>RK</i>	0.3700	0.5341	0.1379
RSVskt	<i>RK</i>	0.1093	0.8654	0.1456

VaR (p 値, low volatility period, $\alpha = 10\%$)

Model	RM	Markov	Weibull	EACD
SVn		0.0005***	0.4849	0.2412
SVt		0.0039***	0.6030	0.0392**
SVskt		0.0349**	0.6025	0.2024
RSVn	<i>RV</i>	0.5323	0.8663	0.0051***
RSVt	<i>RV</i>	0.4302	0.9630	0.0039***
RSVskt	<i>RV</i>	0.1643	0.9871	0.0615*
RSVn	<i>RK</i>	0.1134	0.9732	0.0078
RSVt	<i>RK</i>	0.1116	0.9712	0.0103
RSVskt	<i>RK</i>	0.0261**	0.9705	0.0196

VaR (p 値, high volatility period, $\alpha = 1\%$)

Model	RM	Markov	Weibull	EACD
SVn		0.0149**	0.2177	0.0159**
SVt		0.0182**	0.3909	0.6009
SVskt		0.0642*	0.5396	0.0709*
RSVn	<i>RV</i>	0.0378**	0.0535*	0.9548
RSVt	<i>RV</i>	0.6678	0.8824	0.9791
RSVskt	<i>RV</i>	0.7169	0.9872	0.7384
RSVn	<i>RK</i>	0.0621*	0.7332	0.4002
RSVt	<i>RK</i>	0.2095	0.4914	0.3957
RSVskt	<i>RK</i>	0.4370	0.9241	0.8101

VaR (p 値, high volatility period, $\alpha = 5\%$)

Model	RM	Markov	Weibull	EACD
SVn		0.0058***	0.0032***	0.2854
SVt		0.0036***	0.0025***	0.2644
SVskt		0.0061***	0.0032***	0.2891
RSVn	<i>RV</i>	0.0957*	0.2898	0.2596
RSVt	<i>RV</i>	0.1679	0.1221	0.4072
RSVskt	<i>RV</i>	0.2175	0.1014	0.4697
RSVn	<i>RK</i>	0.0498**	0.0383**	0.1040
RSVt	<i>RK</i>	0.0683*	0.0392**	0.1320
RSVskt	<i>RK</i>	0.0687*	0.0369**	0.1253

VaR (p 値, high volatility period, $\alpha = 10\%$)

Model	RM	Markov	Weibull	EACD
SVn		0.0080***	0.0064***	0.2502
SVt		0.0003***	0.0006***	0.2685
SVskt		0.0016***	0.0038***	0.3428
RSVn	<i>RV</i>	0.2085	0.0213**	0.2427
RSVt	<i>RV</i>	0.2139	0.0174**	0.2434
RSVskt	<i>RV</i>	0.2125	0.0166**	0.2526
RSVn	<i>RK</i>	0.1435	0.0158**	0.1324
RSVt	<i>RK</i>	0.1812	0.0098***	0.1780
RSVskt	<i>RK</i>	0.1826	0.0126**	0.1963

ES

- ▶ Embrechts, Kaufman and Patie (2005)
- ▶ $\delta_t(\alpha) = r_t - ES_t(\alpha)$.
- ▶ $\kappa(\alpha) = \text{VaR violation}$ が起きた時点の集合.
- ▶ $T_1 = \kappa(\alpha)$ の時点の数.
- ▶ $V_1(\alpha) = \frac{1}{T_1} \sum_{t \in \kappa(\alpha)} \delta_t(\alpha)$.
- ▶ $q(\alpha) = \delta_t(\alpha)$ の α -percentile.
- ▶ $\tau(\alpha) = \delta_t(\alpha) < q(\alpha)$ となる時点の集合.
- ▶ $T_2 = \tau(\alpha)$ の時点の数.
- ▶ $V_2(\alpha) = \frac{1}{T_2} \sum_{t \in \tau(\alpha)} \delta_t(\alpha)$.
- ▶ The Embrechts, Kaufmann and Patie (2005) measure

$$V(\alpha) = \frac{|V_1(\alpha)| + |V_2(\alpha)|}{2}.$$

ES (The Embrechts, Kaufman and Patie (2005) measure, low volatility period)

Model	RM	1%	5%	10%
SVn		0.409	0.437	0.256
SVt		0.320	0.412	0.271
SVskt		0.577	0.353	0.298
RSVn	<i>RV</i>	0.058	0.040	0.024
RSVt	<i>RV</i>	0.077	0.043	0.022
RSVskt	<i>RV</i>	0.036	0.027	0.034
RSVn	<i>RK</i>	0.054	0.035	0.037
RSVt	<i>RK</i>	0.072	0.058	0.043
RSVskt	<i>RK</i>	0.084	0.068	0.049

ES (The Embrechts, Kaufman and Patie (2005) measure, high volatility period)

Model	RM	1%	5%	10%
SVn		0.320	0.439	0.329
SVt		0.254	0.376	0.280
SVskt		0.155	0.295	0.230
RSVn	<i>RV</i>	0.275	0.189	0.187
RSVt	<i>RV</i>	0.346	0.142	0.139
RSVskt	<i>RV</i>	0.291	0.132	0.122
RSVn	<i>RK</i>	0.314	0.187	0.185
RSVt	<i>RK</i>	0.214	0.118	0.146
RSVskt	<i>RK</i>	0.217	0.099	0.133

1. ボラティリティの長期記憶性

$$\log(r_t^2) = h_t + \log(\epsilon_t^2), \quad t = 1, \dots, n,$$

$$x_t = \xi + h_t + u_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d(h_{t+1} - \mu) = \eta_t, \quad t = 1, \dots, n-1,$$

- ▶ 実証分析における $x_t(\log RV_t)$ の長期記憶性もモデルに導入 Shirota, Hizu and Omori (2012)
- ▶ ARFIMA 過程を AR 表現、MA 表現を用いて線形正規状態空間モデルで表現
- ▶ Omori, Chib, Shephard and Nakajima (2007) に基づき、 $\log(\epsilon_t^2)$ を混合正規分布で近似, Mixture sampler で推定

2. 多変量 SV モデルへの拡張

$$\mathbf{r}_t = \exp(\mathbf{H}_t/2)\boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\Xi} + \mathbf{H}_t + \mathbf{U}_t,$$

$$\mathbf{H}_{t+1} = \mathbf{M} + \Phi \odot (\mathbf{H}_t - \mathbf{M}) + \mathbf{E}_t,$$

- ▶ $\mathbf{X}_t = \log \mathbf{R}\mathbf{V}_t$, \odot はアダマール積.
- ▶ 非負定符号の対称行列の対数を用いる.
- ▶ 行列指数 SV モデル (Ishihara, Omori and Asai (2011)) の拡張.
- ▶ コレスキー SV モデルの拡張も検討.

3. Realized range-based volatility

- ▶ Christensen and Podolskij (2007), Martens and van Dijk (2007), 高橋 (2011)
- ▶ 一日を n 個の区間に分ける.
- ▶ 各区間には m 個の価格が観測されるものとする.
- ▶ $p_{i,t}^H$: t 日の i 番目の区間の最高値.
- ▶ $p_{i,t}^L$: t 日の i 番目の区間の最安値.
- ▶ Realized range-based volatility:

$$RRV_t = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{i=1}^n (\ln p_{i,t}^H - \ln p_{i,t}^L)^2$$

- ▶ MS ノイズ: Christensen, Podolskij and Vetter (2009)
- ▶ $m \rightarrow \infty$ とすると, $\lambda_m \rightarrow 4 \ln(2)$
- ▶ m が有限の時, λ_m は解析的に求まらない.
- ▶ λ_m は m の増加関数なので, $\lambda_m = 4 \ln(2)$ とすると, RRV は下方バイアスを持つ.

4. Realized GARCH モデルとの比較

- ▶ Hansen, Huang and Shek (2012), Watanabe (2012)

$$r_t = \exp(h_t/2)\epsilon_t$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha x_{t-1}$$

$$x_t = \xi + \varphi \ln \sigma_t^2 + \tau_1 z_t + \tau_2 (z_t^2 - 1) + u_t$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ u_t \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix}.$$

コンファレンスのお知らせ

The Third International Conference “High-Frequency Data Analysis in Financial Markets”

日程: 2012年11月16日(金)–18日(日)

会場: 広島経済大学立町キャンパス 131号教室

海外からの報告者:

- ▶ Torben Andersen (Northwestern University)
- ▶ Peter Hansen (European University Institute)
- ▶ Siem Jan Koopman (VU University Amsterdam)
- ▶ Mark Podolskij (Heidelberg University)
- ▶ Almut Veraart (Imperial College London)
- ▶ Jun Yu (Singapore Management University)

詳細・参加申し込み: 一橋大学経済研究所もしくは一橋大学グローバルCOEプログラム「社会科学の高度統計・実証分析拠点構築」のホームページ

Aas, K. and Haff, I. H. (2006), “The generalized hyperbolic skew Student’s t -distribution,” *Journal of Financial Econometrics*, 4(2), 275–309.

Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A. and Zhang, L. (2005), “How often to sample a continuous-time process in the presence of market microstructure noise,” *Review of Financial Studies*, 18(2), 351–416.

Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2006), “Separating microstructure noise from volatility,” *Journal of Financial Economics*, 79(3), 655–692.

Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2008), “Microstructure noise, realized volatility, and optimal sampling,” *Review of Economic Studies*, 75(2), 339–369.

Bandi, F. M., Russell, J. R. and Yang, C. (2008), “Realized volatility forecasting and option pricing,” *Journal of Econometrics*, 147(1), 34–46.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008), “Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise,” *Econometrica*, 76(6), 1482–1536.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2009), “Realized kernels in practice: trades and quotes,” *Econometrics Journal*, 12(3), C1–C32.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and Mackinlay, A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003) 『ファイナンスのための計量分析』 共立出版.)

Christensen, K. and Podolskij, M. (2007), “Realized range-based estimation of integrated variance,” *Journal of Econometrics*, 141(2), 323–349.

Christensen, K., Podolskij, M. and Vetter, M. (2009), “Bias-correcting the realized range-based variance in the presence of market microstructure noise,” *Finance and Stochastics*, 13(2), 239–268.

Christoffersen, P. F. (1998), “Evaluating interval forecasts,” *International Economic Review*, 39(4), 841–862.

Christoffersen, P. F. and Pelletier, D. (2004), “Backtesting value-at-risk: a duration-based approach,” *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 84–108.

Dobrev, D. and Szerzen, P. (2010), “The information content of high-frequency data for estimating equity return and forecasting risk,” International Finance Discussion Papers 1005, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Embrechts, P., Kaufmann, R. and Patie, P. (2005), “Strategic long-term financial risks: single risk factor,” *Computational Optimization and Applications*, 32(1-2), 61–90.

Engle, R. F. and Russell, J. R. (1998), “Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transition data,” *Econometrica*, 66(5), 1127–1162.

Fukasawa, M., Ishida, I., Maghrebi, N., Oya, K., Ubukata, M. and Yamazaki, K. (2011) “Model-Free Implied Volatility: From Surface to Index,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(4), 433–463.

Giot, P. and Laurent, S. (2004), “Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models,” *Journal of Empirical Finance*, 11(3), 379–398.

Hansen, P. R., Huang, Z. and Shek, H. (2012), “Realized GARCH: a joint model of returns and realized measures of volatility,” *Journal of Applied Econometrics*, 27(6), 877–906.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005a) “A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)?”, *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873–889.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005b), “A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data,” *Journal of Financial Econometrics*, 3(4), 525–554.

Ishihara, T., Omori, Y. and Asai, M. (2011), “Matrix exponential stochastic volatility with cross leverage,” Discussion paper series, CIRJE-F-812, Faculty of Economics, University of Tokyo.

Jacquier, E., Polson, N. G. and Rossi, P. E. (1994), “Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion),” *Journal of Business & Economic Statistics*, 12(4), 371–417.

Jacquier, E., Polson, N. G. and Rossi, P. E. (2004), “Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors,” *Journal of Econometrics*, 122(1), 185–212.

Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2005), “Model-free implied volatility and its information content,” *Review of Financial Studies*, 18(4), 1305–1342.

- Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2007), “Extracting model-free volatility from option prices: An examination of the VIX index,” *Journal of Derivatives*, Spring, 35–60.
- Kim, S., Shephard, N. and Chib, S. (1998), “Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models,” *Review of Economic Studies*, 65(3), 361–393.
- Koopman, S. J. and Scharth, M. (2012), “The analysis of stochastic volatility in the presence of daily realized measures,” *Journal of Financial Econometrics*, forthcoming.
- Kupiec, P. (1995), “Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models,” *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84.
- Martens, M. and van Dijk, D. (2007), “Measuring volatility with the realized range,” *Journal of Econometrics*, 138(1), 181–207.

Nakajima, J. and Omori, Y. (2012), “Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy tailed error using GH skew Student’s t -distribution”, *Computational Statistics and Data Analysis*, 56(11), 3690-3704.

Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. (2007), “Stochastic volatility model with leverage: Fast and efficient likelihood inference,” *Journal of Econometrics*, 140(2), 425–449.

Omori, Y. and Watanabe, T. (2008), “Block sampler and posterior mode estimation for asymmetric stochastic volatility models,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(6), 2892–2910.

Prause, K. (1999), “The generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives, and risk measures,” Ph.D. Dissertation, University of Freiberg.

Shephard, N. and Pitt, M. K. (1997), “Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series,” *Biometrika*, 84(3), 653–667.

Shirota, S., Hizu, T. and Omori, Y. (2012), “Realized stochastic volatility with leverage and long memory,” in progress.

Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009), “Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(6), 2404–2426.

Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2012), “Volatility and quantile forecasts of financial returns using realized stochastic volatility models with generalized hyperbolic distribution,” in progress.

Takeuchi-Nogimori, A. (2012), “An empirical analysis of the Nikkei 225 put options using realized GARCH models,” Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 241, Hitotsubashi University.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2012), “Pricing Nikkei 225 options using realized volatility,” mimeo.

Watanabe, T. (2012), “Quantile forecasts of financial returns using realized GARCH models,” *Japanese Economic Review*, 63(1), 68–80.

Watanabe, T. and Omori, Y. (2004), “A multi-move sampler for estimating non-Gaussian time series model: Comments on Shephard & Pitt (1997),” *Biometrika*, 91(1), 246-248.

Zhang, L. (2006), “Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: A multi-scale approach,” *Bernoulli*, **12**, 1019–1043.

Zhang, L., Mykland, P. A. and Aït-Sahalia, Y., (2005), “A tale of two time scales: determining integrated volatility with noisy high-frequency data,” *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 1394–1411.

杉原慶彦 (2009) 「わが国株式市場のモデルフリー・インプライド・ボラティリティ」 IMES Discussion Paper Series No.2009-J-21.

高橋慎 (2011) 「TOPIX 現物の Realized Volatility と Realized Range-Based Volatility の分析」『現代ファイナンス』第 29 号, 49–73.

中島上智・大森裕浩 (2010) 「一般化双曲型非対称 t 分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用」『日本統計学会誌』第 40 巻 第 2 号, 61–88.

増田弘毅 (2002) 「GIG 分布と GH 分布に関する解析」『統計数理』第 50 巻 第 2 号, 165–199 .

山井康浩・吉羽要直 (2001) 「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測-具体的な計算例による考察-」『金融研究』第 20 巻 第 2 号,33-68.

山口圭子 (2008) 「日経 225 株価指数のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティの計算方法に関して：ボラティリティ予測力の観点から」『一橋経済学』第 3 巻 第 1 号, 29-43.

渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2007) 「Realized Volatility: サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』第 58 巻 第 4 号, 352-373.

渡部敏明・佐々木浩二 (2006) 「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第 25 巻 別冊第 2 号, 39-74.