景気循環学会中原奨励賞受賞講演
「MCMCのマクロ計量モデルへの応用」

渡部敏明

一橋大学経済研究所

2011年11月19日

アウトライン

1. MCMC
2. ベイズ推定
3. マクロ計量モデルへの応用
4. ギブス・サンプラー
5. MH アルゴリズム
6. 時変係数 VAR モデル

1. MCMC

- ある分布からサンプリングを行う際に, 1 回前にサンプリングされた値に依存させて次の値をサンプリングする方法の総称.
- 大きく分けて次の 2 つの方法がある.
  1. ギブス・サンプラー
  2. メトロポリス・ヘイスティングス (MH) アルゴリズム
- 主にベイズ推定に応用されている.
- 参考文献: 中妻 (2007), 和合編 (2005 第 2 章), 小西・越智・大森 (2008)

2. ベイズ推定

- 参考文献：中妻 (2007), 和合編 (2005 第 1 章)
- 以下, θ=未知パラメータ, $\boldsymbol{y}$=標本 (データ) とする.

従来のベイズ推定

(1) 未知パラメータ θ に事前分布 $f(\theta)$ を設定する.

(2) ベイズの定理

$$f(\theta|\boldsymbol{y}) = \frac{f(\boldsymbol{y}|\theta)f(\theta)}{\int f(\boldsymbol{y}|\theta)f(\theta)d\theta} \propto f(\boldsymbol{y}|\theta)f(\theta)$$

を使って事後分布 $f(\theta|\boldsymbol{y})$ を求める.

(3) 事後分布 $f(\theta|\boldsymbol{y})$ を使って未知パラメータ θ を推定する.

2. ベイズ推定

MCMC を用いたベイズ推定

(1) 未知パラメータ θ に事前分布 $f(\theta)$ を設定する.

(2’) MCMC によって事後分布 $f(\theta|y)$ から θ をサンプリングする.

(3’) (2’) でサンプリングされた値を使って未知パラメータ θ を推定する.

3. マクロ計量モデルへの応用

(1) **確率的ボラティリティ変動** (stochastic volatility; SV) **モデル** (**渡部** 2000, 2005, **大森・渡部** 2008)
(2) **時変係数** VAR **モデル** (Primiceri 2005, Nakajima et al. 2011)
(3) **動学的マルコフスイッチングファクターモデル** (Kim and Nelson 1998, Watanabe 2003)
(4) **構造変化点が未知の時系列モデル** (Kim and Nelson 1999, Kim et al. 2004, **渡部** 2009)
(5) DSGE **モデル** (Smets and Wouters 2003, **藤原・渡部** 2011)
(6) DSGE-VAR **モデル** (Del Negro and Schorfheide 2004, Del Negro et al. 2007, **藤原・渡部** 2011)

4. ギブス・サンプラー

- **同時事後分布** $f(\theta|\boldsymbol{y})$ **は未知であるが, 未知パラメータ** θ **をいくつかのブロック** $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ **に分けた場合の完全条件付事後分布** (full conditional distribution)

$$f(\theta_i|\theta_1 \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_k, \boldsymbol{y}) \quad i = 1, \ldots, k$$

はすべて求められ, かつ, そこからサンプリングを行えるものとする. ただし, $(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ **はそれぞれ** 1 **変量であっても多変量であっても構わない. こうした場合に用いられるのが, ギブス・サンプラーである.**

4. ギブス・サンプラー

- 適当な初期値 $(\theta_2^{(0)}, \ldots, \theta_k^{(0)})$ からスタート
- 第 1 ループ
  $f(\theta_1|\theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \ldots, \theta_k^{(0)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_1^{(1)}$ をサンプリング
  $f(\theta_2|\theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \ldots, \theta_k^{(0)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_2^{(1)}$ をサンプリング
  $$\vdots$$
  $f(\theta_k|\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \ldots, \theta_{k-1}^{(1)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_k^{(1)}$ をサンプリング
- 第 2 ループ
  $f(\theta_1|\theta_2^{(1)}, \theta_3^{(1)}, \ldots, \theta_k^{(1)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_1^{(2)}$ をサンプリング
  $f(\theta_2|\theta_1^{(2)}, \theta_3^{(1)}, \ldots, \theta_k^{(1)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_2^{(2)}$ をサンプリング
  $$\vdots$$
  $f(\theta_k|\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \ldots, \theta_{k-1}^{(2)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_k^{(2)}$ をサンプリング

4. ギブス・サンプラー

- これを繰り返すと, 第 l ループでは, $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \ldots, \theta_k^{(l)})$ がサンプリングされるが, $l \to \infty$ とすると, これは同時事後分布
$$f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k | \boldsymbol{y})$$
からサンプリングされた確率変数に分布収束する.
- そこで, 最初の M ループ (M は十分大きな値とする) でサンプリングされた値を捨て (この M ループのことを “burn-in”と呼ぶ), さらに N ループを行ってサンプリングされた $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \ldots, \theta_k^{(l)})$ $(l = M+1, M+2, \cdots, M+N)$ を同時事後分布 $f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k | \boldsymbol{y})$ からサンプリングされた値と見なし, 推定に用いればよい.

4. ギブス・サンプラー

- 以後, burn-in 以降のサンプルを $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \ldots, \theta_k^{(l)})$ $(l = 1, 2, \cdots, N)$ とする.
- θ_i の平均は標本平均として推定できる.

$$\mathrm{E}[\theta_i | \boldsymbol{y}] \approx \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \theta_i^{(l)}$$

- θ_i の 95%信用区間 (credible interval) を求めるには, $\left(\theta_i^{(1)}, \ldots, \theta_i^{(N)}\right)$ を大きさの順に並べ替え, 上 2.5%と下 2.5%の値をとればよい.
- 関数 $h(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ の平均も標本平均として推定できる.

$$\mathrm{E}[h(\theta_1, \ldots, \theta_k) | \boldsymbol{y}] \approx \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} h(\theta_1^{(l)}, \ldots, \theta_k^{(l)})$$

- 関数 $h(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ の 95%信用区間も同様に求められる.

5. MH アルゴリズム

(1) $f(x)$ を近似していて, かつ, 直接サンプリングできるような提案密度関数 (proposal density function) $g(x)$ と初期値 x_0 を選択する.

(2) $n = 1$ とする.

(3) 提案密度関数 $g(x)$ からサンプリングし, 得られた値 $x_n^{(\text{proposal})}$ を使って受容確率 q を次のように計算する.

$$q = \min\left[\frac{f(x_n^{(\text{proposal})})g(x_{n-1})}{f(x_{n-1})g(x_n^{(\text{proposal})})}, 1\right]$$

(4) $x_n^{(\text{proposal})}$ を確率 q で受容し, 確率 $1 - q$ で棄却する. 受容された場合には, $x_n = x_n^{(\text{proposal})}$ とする. 棄却された場合には, $x_n = x_{n-1}$ とする.

(5) $n < N$ であれば, $n = n + 1$ として, (3) に戻る. $n = N$ であれば, 終了する.

5. MH アルゴリズム

- Chib and Greenberg (1995)

6. 時変係数 VAR モデル

- Primiceri (2005)
- Nakajima et al. (2011)

6. 時変係数 VAR モデル

構造形

$$A_t y_t = F_{1t} y_{t-1} + \cdots + F_{st} y_{t-s} + \Sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, I).$$

ここで,

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21t} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{k1t} & \cdots & a_{k,k-1,t} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{kt} \end{pmatrix}.$$

6. 時変係数 VAR モデル

誘導形

$$y_t = B_{1t} y_{t-1} + \cdots + B_{st} y_{t-s} + A_t^{-1} \Sigma_t \varepsilon_t.$$

ここで, $B_{it} = A_t^{-1} F_{it}$.

β_t: stacked vector of $(B_{1t}, \ldots, B_{st})$
a_t: stacked vector of A_t
$h_{it} = \log \sigma_{it}^2$
$h_t = (h_{1t}, \ldots, h_{kt})'$

6. 時変係数 VAR モデル

- パラメータはランダムウオークに従うと仮定する.

$$
\begin{aligned}
\beta_{t+1} &= \beta_t + u_{\beta t}, \\
a_{t+1} &= a_t + u_{at}, \quad t = s+1, \ldots, n, \\
h_{t+1} &= h_t + u_{ht},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} u_{\beta t} \\ u_{at} \\ u_{ht} \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{pmatrix} \Sigma_\beta & O & O \\ O & \Sigma_a & O \\ O & O & \Sigma_h \end{pmatrix}\right).
$$

ここで, Σ_β, Σ_a, Σ_h はすべて対角行列であると仮定する.

6. 時変係数 VAR モデル

ギブス・サンプラー

1. $\Sigma_\beta, \Sigma_a, \Sigma_h, \beta, a, h$ に適当な初期値を置く.
2. $f(\beta \mid \Sigma_\beta, a, h, y)$ からサンプリング.
3. $f(\Sigma_\beta \mid \beta)$ からサンプリング.
4. $f(a \mid \Sigma_a, \beta, h, y)$ からサンプリング.
5. $f(\Sigma_a \mid a)$ からサンプリング.
6. $f(h \mid \Sigma_h, \beta, a, y)$ からサンプリング.
7. $f(\Sigma_h \mid h)$ からサンプリング.
8. 2 に戻る.

6. 時変係数 VAR モデル

β, a のサンプリング

- **シミュレーション・スムーザ**
  - de Jong and Shephard (1995)
  - Durbin and Koopman (2002)

h のサンプリング

- Mixture sampler
  - Kim, Shephard and Chib (1998)
  - Omori et al. (2007)
- Block (or multi-move) sampler
  - Shephard and Pitt (1997)
  - Watanabe and Omori (2004)

6. 時変係数 VAR モデル

日本経済への応用

- **データ**
  - p: **物価** (CPI)
  - y: **鉱工業生産指数** (IIP)
  - r: **コール・レート**
  - m: **マネタリー・ベース**
- **サンプル期間**
  - 1981/1Q–2008/3Q, **四半期**
- **データの変換**
  - $r \rightarrow$ **階差**
  - $p, y, m \rightarrow$ **対数階差**

6. 時変係数 VAR モデル

モデル選択

- 事後オッズ比

$$\frac{p(\mathrm{M}_i|\boldsymbol{y})}{p(\mathrm{M}_j|\boldsymbol{y})} = \frac{p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_i)}{p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_j)} \frac{p(\mathrm{M}_i)}{p(\mathrm{M}_j)}$$

- $p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_i)/p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_j)$: ベイズ・ファクター
- $p(\mathrm{M}_i)/p(\mathrm{M}_j)$: 事前オッズ比
- $p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_i)$ or $p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_j)$: 周辺尤度
- $p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_i)/p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_j) > 1$ であれば M_i を選択.
- どちらのモデルが正しいか事前情報が無い場合, $p(\mathrm{M}_i)/p(\mathrm{M}_j) = 1$ とする.
- その場合,

$$\frac{p(\mathrm{M}_i|\boldsymbol{y})}{p(\mathrm{M}_j|\boldsymbol{y})} = \frac{p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_i)}{p(\boldsymbol{y}|\mathrm{M}_j)}$$

となるので, 周辺尤度の高いモデルを選択する.

6. 時変係数 VAR モデル

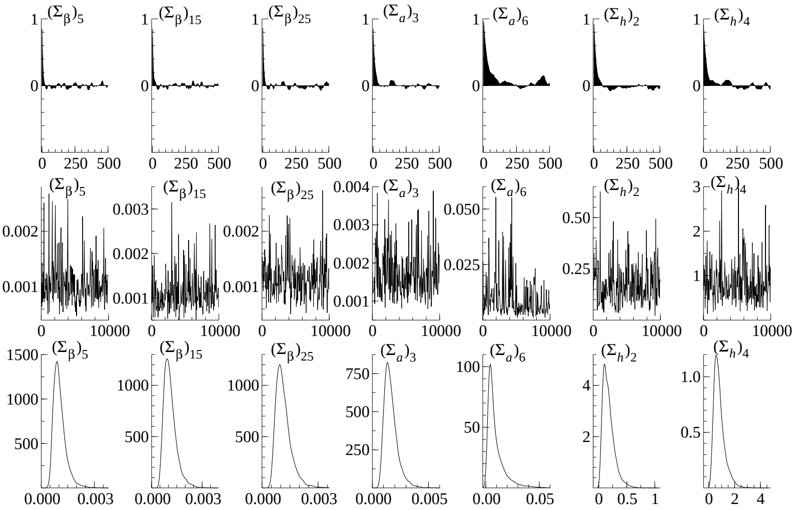
対数周辺尤度

Lag	CP-VAR	STVP1-VAR	STVP2-VAR	TVP-VAR
1	-519.01	-470.35	-457.41	-339.11
2	-548.76	-497.13	-430.67	-311.24
3	-581.30	-499.32	-404.67	-327.12
4	-621.13	-521.10	-442.36	-346.30

CP: constant parameter, STVP: semi time-varying parameter (1:time-varying Σ_t, 2:time-varying β_t and a_t), TVP: time-varying parameter). **周辺尤度は** Geweke (1999) **の修正調和平均法を用いて計算した**.

6. 時変係数 VAR モデル

パラメータの推定結果:



6. 時変係数 VAR モデル

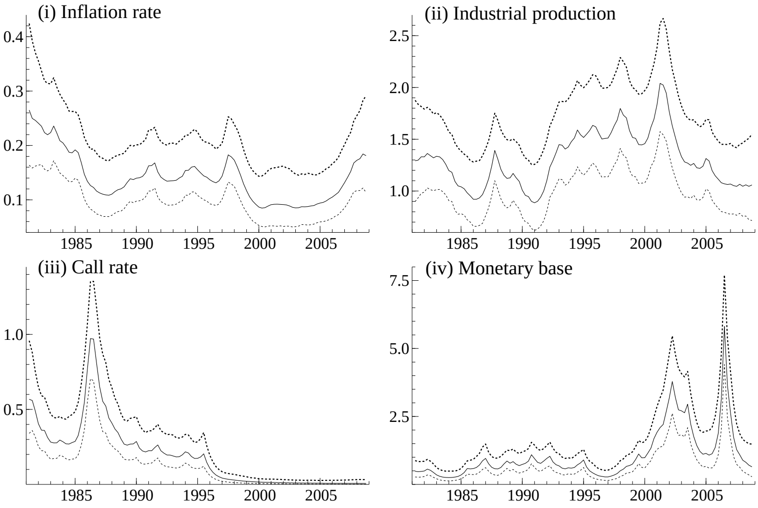
パラメータの推定結果:

パラメータ	平均	標準偏差	95% 信用区間	CD	Ineff.
$(\Sigma_\beta)_5$	0.1037	0.0355	[0.0570, 0.1919]	0.974	8.01
$(\Sigma_\beta)_{15}$	0.1104	0.0387	[0.0579, 0.2061]	0.075	10.11
$(\Sigma_\beta)_{25}$	0.1149	0.0413	[0.0594, 0.2175]	0.700	10.90
$(\Sigma_a)_3$	0.1652	0.0610	[0.0827, 0.3178]	0.922	24.62
$(\Sigma_a)_6$	0.9300	0.8759	[0.0174, 3.4204]	0.149	68.76
$(\Sigma_h)_2$	0.1748	0.1047	[0.0411, 0.4419]	0.215	23.41
$(\Sigma_h)_4$	0.8198	0.4306	[0.2516, 1.9022]	0.622	44.64

Σ_β と Σ_a の推定値は 100 倍している. CD = Geweke (1992) の収束診断 (convergence diagnostic; CD) 統計量. Ineff. = Chib (2001) の非効率性因子 (inefficiency factor).

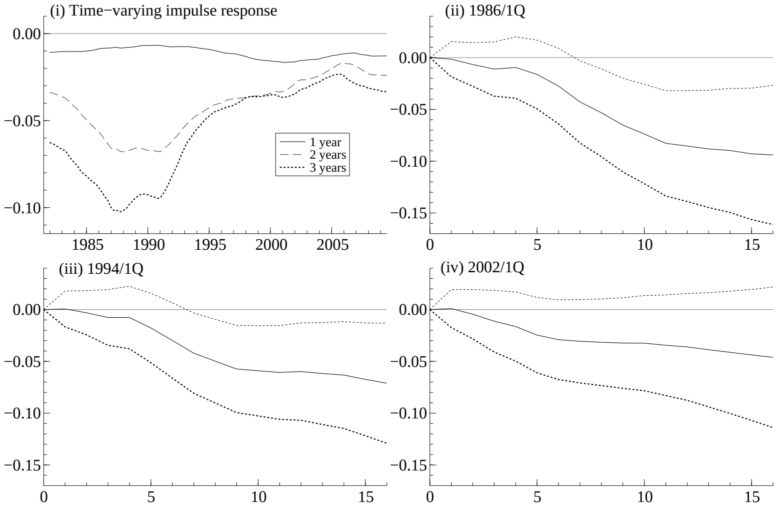
6. 時変係数 VAR モデル

ボラティリティ ($\sigma_{it} = \exp(h_{it}/2)$) の事後平均:



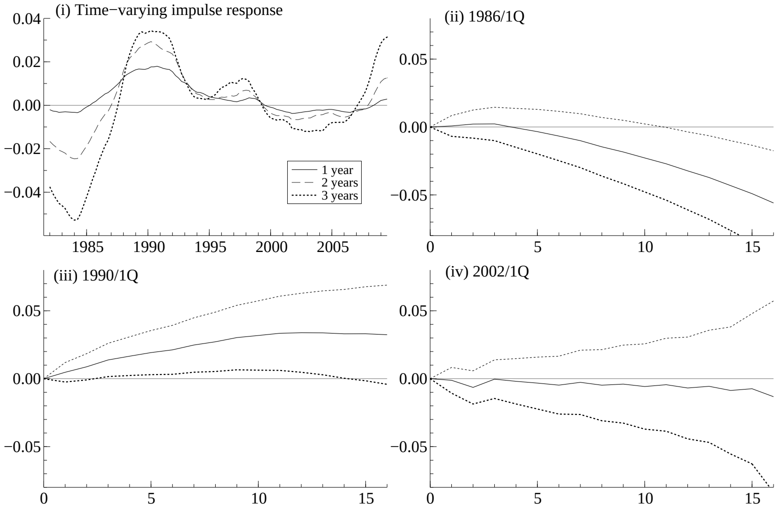
6. 時変係数 VAR モデル

インパルス応答 ($\epsilon_r \to y$)



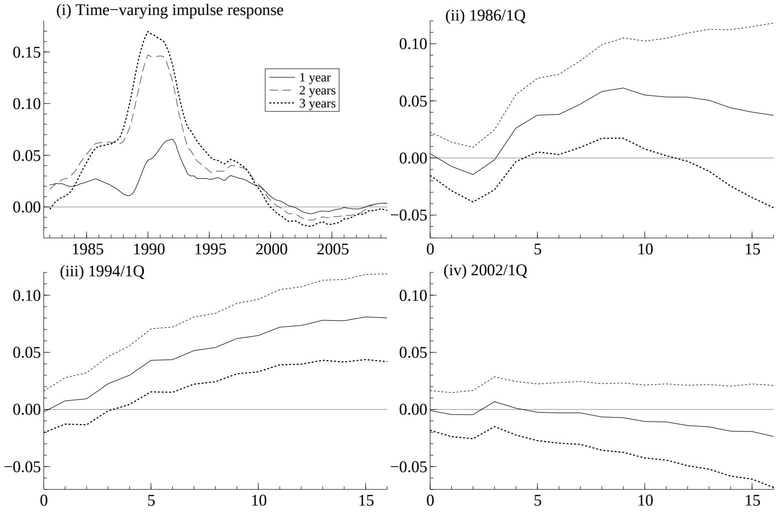
6. 時変係数 VAR モデル

インパルス応答 ($\epsilon_r \to p$)



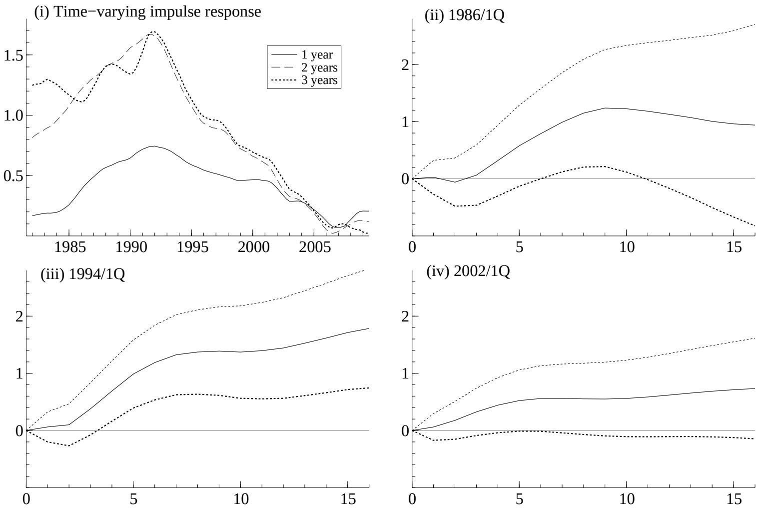
6. 時変係数 VAR モデル

インパルス応答 ($\epsilon_p \rightarrow r$)



6. 時変係数 VAR モデル

インパルス応答 ($\epsilon_m \to y$)



6. 時変係数 VAR モデル

今後の発展

1. **変数の順番** → RJMCMC (Nakajima and Watanabe 2011)
2. **他の識別制約**
3. **ランダム・ウオーク** → **定常な** AR **モデル** (Primiceri 2005)
4. **ゼロ金利制約** (Nakajima 2011)
5. **マルコフスイッチングモデルとの比較** (Inoue and Okimoto 2008)
6. **誤差項の分布** (Watanabe 2001, **渡部** 2005)

参考文献

大森裕浩・渡部敏明 (2008)「MCMC とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」国友直人・山本拓監修・編『21 世紀の統計科学　社会・経済の統計科学』第 9 章, 223–266.

小西貞則・越智義道・大森裕浩 (2008)『計算科学の方法–ブートストラップ, EM アルゴリズム, MCMC』朝倉書店.

中妻照雄 (2007)『入門ベイズ統計学』朝倉書店.

藤原一平・渡部敏明 (2011)「マクロ動学一般均衡モデル-サーベイと日本のマクロデータへの応用」『経済研究』第 62 巻, 第 1 号, 66–93.

和合肇編著 (2005)『ベイズ計量経済分析 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.

渡部敏明 (2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明 (2005)「確率的ボラティリティ変動モデルのベイズ推定法」和合肇編著『ベイズ計量経済分析 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』第 9 章, 259–294, 東洋経済新報社.

渡部敏明 (2009)「マルコフ・スイッチング・モデルを用いた日本の景気循環の計量分析」『経済研究』第 69 巻, 第 3 号, 253–265.

Chib, S. (2001), “Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference,” Heckman, J. J. and Leamer, E. (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol.5, Amsterdam: North-Holland, 3569–3649.

参考文献

Chib, S. and Greenberg, E. (1995), "Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm," *American Statistician,* **49**, 327–335.

Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2004), "Priors from General Equilibrium Models for VARs," *International Economic Review*, **45**, 643–673.

Del Negro, M., Schorfheide, F., Smets, F. and Wouters, R. (2007), "On the Fit of New Keynesian Models," (with comments), *Journal of Business & Economic Statistics*, 25, 123–162.

de Jong, P. and Shephard, N. (1995), "The Simulation Smoother for Time Series Models," *Biometrika*, **82**, 339–350.

Durbin, J. and Koopman, S. J. (2002), "Simple and Efficient Simulation Smoother for State Space Time Series Analysis," *Biometrika*, **89**, 603–616.

Geweke, J. (1992), "Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments," in J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid and A.F.M. Smith (eds) *Bayesian Statistics 4,* Oxford: Oxford University Press, 169–193.

Geweke, J. (1999), "Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development and Communication," *Econometric Reviews*, **18**, 1–126.

Inoue, T. and Okimoto, T. (2008), "Were There Structural Breaks in the Effects of Japanese Monetary Policy? Re-Evaluating Policy Effects of the Lost Decade," *Journal of the Japanese and International Economies*, **22**, 320–342.

参考文献

Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1998), “Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime-Switching,” *Review of Economics and Statistics,* **80,** 188–201.

Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1999), “Has the U.S. Economy More Stable? A Bayesian Approach Based on a Markov-Switching Model of a Business Cycle,” *Review of Economics and Statistics and Statistics*, **81**, 608–616.

Kim, C.-J., Nelson, C. R. and Piger, J. (2004), “The Less-Volatile U.S. Economy: A Bayesian Investigation of Timing, Breath, and Potential Explanations,” *Journal of Business & Economic Statistics*, **22**, 80–93.

Kim, S., Shephard, N. and Chib, S. (1998), “Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models,” *Review of Economic Studies*, **65**, 361–393.

Nakajima, J. (2011). “Monetary Policy Transmission under Zero Interest Rates: An Extended Time-Varying Parameter Vector Autoregression Approach” *The B.E. Journal of Macroeconomics*, **11**, Issue 1 (Topics), Article 32.

Nakajima, J., Kasuya, M. and Watanabe, T. (2011), “Bayesian Analysis of Time-Varying Parameter Vector Autoregressive Model for the Japanese Economy and Monetary Policy,” *Journal of the Japanese and International Economies*, **25**, 225–245.

参考文献

Nakajima, J. and Watanabe, T. (2011), "Bayesian Analysis of Time-Varying Parameter Vector Autoregressive Model with the Ordering of Variables for the Japanese Economy and Monetary Policy," Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 196, Hitotsubashi University.

Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. (2007), "Stochastic Volatility with Leverage: Fast Likelihood Inference," *Journal of Econometrics*, **140**, 425–449.

Primiceri, G. E. (2005), "Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy", *Review of Economic Studies*, **72**, 821–852.

Shephard, N., and Pitt, M. K. (1997), "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series Analysis," *Biometrika*, **84**, 653–667.

Smets, F. and Wouters, R. (2003), "An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Erea," *Journal of the European Economic Association*, **1**, 1123–1175.

Watanabe, T. (2001), "On Sampling the Degree-of-Freedom of Student-*t* Disturbances," *Statistics and Probability Letters*, **52**, 177–181.

Watanabe, T. (2003), "Measuring Business Cycle Turning Points in Japan with a Dynamic Markov Switching Factor Model," *Monetary and Economic Studies*, **21**, 35–68.

Watanabe, T. and Omori, Y. (2004), "A Multi-Move Sampler for Estimating Non-Gaussian Time Series Models: Comments on Shephard and Pitt (1997)," *Biometrika*, **91**, 246–248.