HITOTSUBASHI UNIVERSITY

Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series 293

Research Unit for Statistical and Empirical Analysis in Social Sciences (Hi-Stat)

金融政策の国際協調
—「新しい開放マクロ経済学からの展望」—

藤原一平

April 2013

Hi-Stat Discussion Paper

Hi-Stat
Institute of Economic Research
Hitotsubashi University
2-1 Naka, Kunitatchi Tokyo, 186-8601 Japan
http://gcoe.ier.hit-u.ac.jp

金融政策の国際協調

－「新しい開放マクロ経済学からの展望」－

藤原　一平*
オーストラリア国立大学

2013 年 2 月 24 日

概要

本稿では、国際マクロ経済学において、基本的な分析ツールとなっている「新しい開放マクロ経済学」モデルについて、これまでの代表的な研究のエッセンスを紹介するとともに、モデルの導出の詳細を示すこと目的としている。まず、メカニズムを簡略化した解析解の得られるモデルで、国際的なショックや政策の波及メカニズムの直観的理解を提供する。次に、標準的なモデルを解いたうえで、国際協調する中央銀行が目的とすべき損失関数を導出し、国際協調政策の目的を明らかにする。なお、モデルは、国際価格設定が、生産者通貨建価格設定（Producer Currency Pricing、PCP)、および､、需要地価格設定（Local Currency Pricing、LCP）の両方のケースを考慮する。

1　はじめに

閉鎖経済を分析する際に、学部レベルの講義で習う IS=LM モデルは、ミクロ的基盤を持たないため、ルーカス批判をクリアすることができない。このため、近年、金融政策分析をするにあたっては、いわゆる、ニュー・ケインジアン・モデルが用いられるようになってきている。開放経済マクロでも、同様の理由から、マンデル・フレミング・モデルにとって代わる存在として、特に、Obstfeld and Rogoff (1995) 以降、新しい開放マクロ経済学モデルが、標準的なモデルとして認識されるようになってきている。

本稿では、これまでの代表的な研究のエッセンスを紹介するとともに、モデルの導出の詳細を示すこと目的としている。まず、メカニズムを簡略化した解析解の得られるモデルで、国際的なショックや政策の波及メカニズムの直観的理解を提供する。次に、標準的なモデルを解いたうえで、国際協調する中央銀行が目的とすべき損失関数を導出し、国際協調政策の目的を明らかにする。なお、モデルは、国際価格設定が、生産者通貨建価格設定（Producer Currency Pricing、PCP)、および､、需要地価格設定（Local Currency Pricing、LCP）の両方のケースを考慮する。

本稿の

* 所長　豪日研究センター

2　解析解が得られるモデル

本節では、まず、新しい開放マクロ経済学モデルの本質を、解析的に理解できる Corsetti and Pesenti (2001, 2005, 2009、以下 CP) によって開発されたモデルを紹介する。この CP モデルを用いると、国際的な金融政策協調の有用性をグラフにて解析的に理解することが可能となる。次に、Calvo （1983）型の価格硬直性を組み込むことによって、現実的なメカニズムを描くことが可能となっている標準モデル（Clarida, Gali and Gertler, 2001、Engel, 2011）について、線形近似された構造方程式とともに、２次近似された社会損失関数も導出する。後者の標準モデルを導出することにより、具体的に、どのようなパラメーターが、金融政策の国際協調に重要であるかを理解することが可能となる。

2.1　CP モデル

対照的な２カ国（自国：H、外国：F）を想定し、それぞれの国には、家計、企業、中央銀行（政府）の３主体が存在するような経済を考える。

2.1.1　家計

自国の代表的家計は、以下のように総消費（C）と労働供給（h）によって規定される効用

$$u\left(C, l\right) = \log\left(C\right) - \kappa h, \tag{1}$$

を、予算制約式

$$C = \frac{W}{P}h + \Pi$$

の下で最大化する。なお、W は名目賃金、P は一般物価水準。実際の予算制約式には、国内債や外国債への投資、マネーおよびアロー証券の保有が含まれるが、ここでの説明ではわかりやすさを重視し、これらを省略した。債券投資については、CP における構造の設定（具体的には対数効用関数と、コブ・ダグラス型の消費集約関数）下では、国単位では、資金の貸し借りが発生しないため、このような予算制約式を考えても、問題はない。マネー保有については、後述する中央銀行が名目総需要を金融政策でコントロールすると仮定することで、家計の最適化問題では考えないこととする。また、アロー証券の国際的な取引についても、以下で、完備市場の下での国際的リスク・シェアリングの条件を直接用いることで省略する。厳密に定義された予算制約式については、後述する標準モデルの導出を参照されたい。

一階の必要条件から、以下のような労働供給に関する最適条件が導出される：

$$\kappa C = \frac{W}{P}. \tag{2}$$

国内総消費は、自国生産財への消費（C_H）と外国生産財への消費（C_F）より構成される[*1]：

$$C = \left(\frac{C_H}{.5}\right)^{.5}\left(\frac{C_F}{.5}\right)^{.5}. \tag{3}$$

国内一般物価水準（P）は、以下のように定義される総費用

$$P_H C_H + P_F C_F$$

[*1] これは、消費者の選好を示す効用関数として捉えることも可能だが、国内生産財と海外生産財を組み合わせて最終消費財を作る企業の生産関数として捉えることもできる。

を、(3) 式を制約にして最小化する際のラグランジュ乗数として求められる。なお、P_H は国内生産財価格、P_F は外国生産財の自国通貨建て価格。この費用最小化問題から、以下のような国内財と外国財についての（ヒックス型）需要関数が求まる：

$$C_H = .5\left(\frac{P_H}{P}\right)^{-1} C, \tag{4}$$

$$C_F = .5\left(\frac{P_F}{P}\right)^{-1} C. \tag{5}$$

(4)、(5) 式を (3) 式に代入することのより、国内一般物価水準が定義される：

$$P = P_H^{.5} P_F^{.5}. \tag{6}$$

なお、国内財、海外財とも、それぞれ、以下のように、個別財 (j) を集約したものとして定義される：

$$C_H = \left[\int_0^1 C_H\left(j\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \tag{7}$$

$$C_F = \left[\int_0^1 C_F\left(j^*\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j^*\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}. \tag{8}$$

ここで、$*$ 付き変数は外国の変数を示す。また、ε は各消費財間の代替の弾力性。上記と同様の費用最小化問題から、個別財の需要関数も求めることができる：

$$C_H\left(j\right) = \left[\frac{P_H\left(j\right)}{P_H}\right]^{-\varepsilon} C_H, \tag{9}$$

$$C_F\left(j^*\right) = \left[\frac{P_F\left(j^*\right)}{P_F}\right]^{-\varepsilon} C_F. \tag{10}$$

外国についても、同様に、以下のような構造方程式が導出される：

$$\kappa C^* = \frac{W^*}{P^*}, \tag{11}$$

$$C_H^* = .5\left(\frac{P_H^*}{P^*}\right)^{-1} C^*, \tag{12}$$

$$C_F^* = .5\left(\frac{P_F^*}{P^*}\right)^{-1} C^*, \tag{13}$$

$$P^* = \left(P_H^*\right)^{.5}\left(P_F^*\right)^{.5}. \tag{14}$$

2.1.2 企業

自国企業 j は、線形の生産技術

$$Y\left(j\right) = C_H\left(j\right) + C_H^*\left(j\right) = Zh\left(j\right) \tag{15}$$

を有する。このため、国内企業の名目の限界費用は、

$$NMC = \frac{W}{Z} \tag{16}$$

として定義される。なお、完全競争下の労働市場を仮定しているため、すべての国内企業が共通の限界費用に直面する。ここで、国内企業 j は、独占的競争下、経済に発生したショックを認識する前に、価格を設定する（名目価格の硬直性）。国内販売分については、以下のように定義される期待利潤を最大化するように、価格は設定される：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Pi &= \mathrm{E}\left[P_H(j)\,C_H(j) - NMCC_H(j)\right] \\ &= \mathrm{E}\left\{P_H(j)\left[\frac{P_H(j)}{P_H}\right]^{-\theta} C_H - \frac{W}{Z}\left[\frac{P_H(j)}{P_H}\right]^{-\theta} C_H\right\}.\end{aligned}$$

なお、(9)、(16) 式を代入した。一階の必要条件として、期待限界費用にマークアップを付加する形で、国内販売価格はフォワードルッキングに決定される：

$$P_H(j) = P_H = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\mathrm{E}\left(\frac{W}{Z}\right). \tag{17}$$

輸出価格については、二つの価格設定方法を考える。一つは、生産地通貨建て価格設定（Producer Currency Pricing、以下 PCP）と呼ばれるもので、自国通貨建て価格に、名目為替相場（S: 自国通貨／外国通貨）を掛け合わせることにより、輸出価格が決定される。PCP の下では、国内生産財の海外通貨建て価格は、

$$P_H^* = \frac{P_H}{S} \tag{18}$$

となる。一方、もう一つの方法は、販売地通貨建て価格設定（Local Currency Pricing、以下 LCP）と呼ばれるもので、企業 j は、事前に為替相場の動向も動向も睨みながら、直接外国通貨建てで輸出価格を設定する。すなわち、企業は、為替の変動も考慮した

$$\mathrm{E}\left[P_H^*(j)\,C_H^*(j) - \frac{W}{SZ}C_H^*(j)\right]$$

期待利潤を最大化するよう価格を設定する。この結果、輸出価格は、

$$P_H^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\mathrm{E}\left(\frac{W}{SZ}\right) \tag{19}$$

として決定される。

外国についても、同様に、以下のような構造方程式を導出できる：

$$P_F^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\mathrm{E}\left(\frac{W^*}{Z^*}\right), \tag{20}$$

$$P_F = SP_F^*, \tag{21}$$

$$P_F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\mathrm{E}\left(\frac{SW}{Z}\right). \tag{22}$$

2.1.3 **中央銀行**

自国の中央銀行は、マネーの供給等を通じて、名目消費をコントロールできると仮定する：

$$PC = \mu. \tag{23}$$

なお、μ は金融政策スタンス。若干違和感のある仮定のように思われるが、標準的なニュー・ケインジアン・モデルでも、金融政策は、短期的には、名目消費をコントロールしている。家計の効用最大化問題より、消費

のオイラー方程式が導出されるなか、名目消費の伸び率が、金融政策によって決定される名目金利によって規定される。

同様に、外国でも、

$$P^* C^* = \mu^* \tag{24}$$

が成立する。

なお、この結果、(2)、(11)、(23)、(24) 式を用いると、まず、(17)、(20) 式で示される国内価格は、

$$P_H = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \mathrm{E}\left(\frac{\kappa\mu}{Z}\right), \tag{25}$$

$$P_F^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \mathrm{E}\left(\frac{\kappa\mu^*}{Z^*}\right), \tag{26}$$

として設定される。一方、輸出価格については、PCP のケースでは、引き続き、()、() 式がこれを決定するが、LCP のケースでは、(19)、(22) 式で表現される最適価格は、以下のように変形される：

$$P_H^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \mathrm{E}\left(\frac{\kappa\mu}{SZ}\right), \tag{27}$$

$$P_F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \mathrm{E}\left(\frac{S\kappa\mu^*}{Z}\right). \tag{28}$$

2.1.4 市場均衡

完備な国際金融市場では、完全なリスク・シェアリングが達成される。すなわち、各国に固有のショック (Z、Z^*、μ、μ^*) が発生したとしても、消費の限界効用は、両国で実質的に等しくなる：

$$\frac{\partial u(C^*, l^*)}{\partial C^*} = \frac{SP^*}{P} \frac{\partial u(C, l)}{\partial C}.$$

ここで、$\frac{SP^*}{P}$ は、実質為替相場を表している。(1) 式を代入すると、

$$PC = SP^* C^* \tag{29}$$

となり、さらに、(23)、(24) 式を用いると、

$$S = \frac{\mu}{\mu^*} \tag{30}$$

という名目為替相場の決定式が導出される。名目為替相場は、金融政策スタンスの相対的な変化に対して変動する。

一方、(15) 式で表現される資源制約式を、国ごとに集計し、

$$C_H + C_H^* = Zh,$$

これに、(4)、(12)、(29) 式を代入することにより、国内財の資源制約式が導出できる。

$$\begin{aligned} Zh &= .5\left(\frac{P_H}{P}\right)^{-1} C + .5\left(\frac{P_H^*}{P^*}\right)^{-1} C^* \\ &= \frac{PC}{P_H} + \frac{SP^*C^*}{SP_H^*} \\ &= .5\left(\frac{P}{P_H} + \frac{P}{SP_H^*}\right) C. \end{aligned} \tag{31}$$

なお、価格設定が PCP のケースでは、(6)、(18) 式を代入することにより、

$$C = \left(\frac{P_H}{P_F}\right)^{.5} Zh \tag{32}$$

が導出でき、交易条件の改善（すなわち、$\frac{P_F}{SP_H^*} = \frac{P_F}{P_H}$ の低下）が、同じ労働投入での高い消費を可能とする、すなわち、閉鎖経済における技術ショックのような働きをすることがわかる[*2]。

外国生産財についても、同様に、

$$Z^* h^* = .5\left(\frac{SP^*}{P_F} + \frac{P^*}{P_F^*}\right) C^*, \tag{33}$$

$$C^* = \left(\frac{P_F^*}{P_H^*}\right)^{.5} Z^* h^*, \tag{34}$$

が導出される。

ここで、新しい変数 τ を導入しよう。すると、(31)、(32)、(33)、(34) 式は、以下の 2 式に集約することが可能となる。

$$C = \tau Z h, \tag{35}$$

$$C^* = \tau^* Z^* h^*. \tag{36}$$

なお、τ は、PCP のケースでは、

$$\tau = \left(\frac{P_H}{P_F}\right)^{.5}, \tag{37}$$

$$\tau^* = \left(\frac{P_H}{P_F}\right)^{.5} \tag{38}$$

をそれぞれ示し、LCP のケースでは、

$$\tau = \left[.5\left(\frac{P}{P_H} + \frac{P}{SP_H^*}\right)\right]^{-1}, \tag{39}$$

$$\tau^* = \left[.5\left(\frac{SP^*}{P_F} + \frac{P^*}{P_F^*}\right)\right]^{-1} \tag{40}$$

となる。

2.1.5 開放経済モデル

外生的に決定される金融政策（μ、μ^*）の下、PCP の下では、(4)、(5)、(6)、(12)、(13)、(14)、(18)、(21)、(23)、(24)、(25)、(26)、(30)、(35)、(36)、(37)、(38) 式が、LCP の下では、(4)、(5)、(6)、(12)、(13)、(14)、(23)、(24)、(25)、(26)、(27)、(28)、(30)、(35)、(36)、(39)、(40) 式が、h、h^*、C、C^*、C_H、C_H^*、C_F、C_F^*、P、P^*、P_H、P_H^*、P_F、P_F^*、S、τ、τ^* を内生的に決定する。ここで、消費と労働供給量の 2 変数の決定に着目すると、均衡は図 1 のような形で示される[*3]。ここで、NR は、自然率、すなわち、総労働供給の期待値を示す。上記モデルを解くと、労働供給の期待値について、

$$\mathrm{E}\,(h) = \mathrm{E}\,(h^*) = \frac{\theta - 1}{\theta\kappa}, \tag{41}$$

[*2] しかし、Kehoe and Ruhl (2008) は、より厳密にみると、両者は異なった性質を持つことを明らかにしている。
[*3] グラフは、Corsetti and Pesenti (2005) のものを使用している。グラフ上の l は本文中の h を意味している。

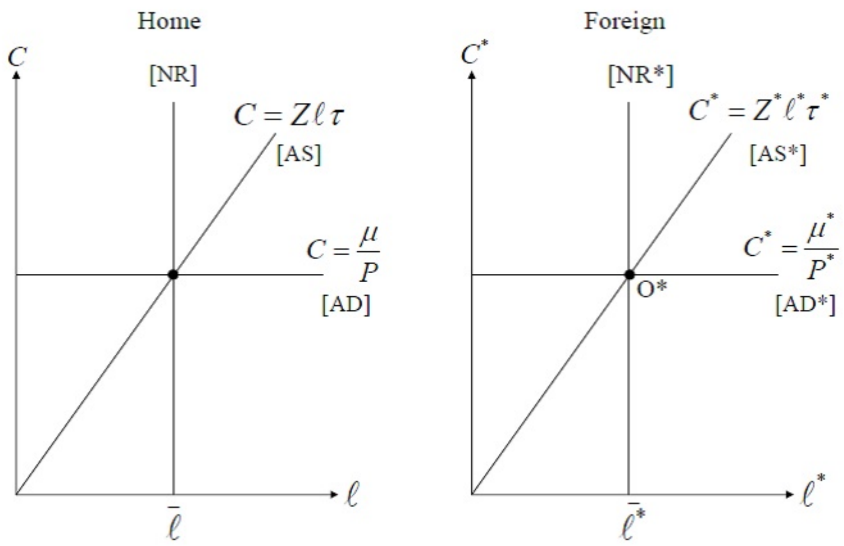

図１　世界経済モデル

を導出することができる。ショックがなければ、労働供給はこの値にとどまり、ショックがあったとしても、それが一時的なものであれば、平均で見て、労働供給量がこのレベルに収まることとなる。逆に見ると、一時的には、労働供給量が自然率から乖離することも示している。

なお、伸縮価格下では、労働供給は、必ず、この値にとどまり続けることとなる。モデルの中の期待値は、あくまで、価格の粘着性に伴う、フォワードルッキングな価格設定によるものであった。このため、伸縮価格下では、均衡の決定に期待値が影響しなくなるため、常に、

$$h = h^* = \frac{\theta - 1}{\theta\kappa},$$

が成立する。同じように、PCP と LCP における輸入価格設定方法も、異なるのは期待値の部分だけとなっている。このため、価格の粘着性がなければ、PCP と LCP を区別する必要はない。

図１は、総供給曲線（(35)、(36) 式)、総需要曲線（(23)、(24) 式）と自然率（(41) 式）の交点が均衡となることを示している。

2.1.6　ショックの国際波及

では、ここで、一時的な技術ショック（$Z\uparrow$）が自国に発生したような状況を考えてみよう。まずは、伸縮価格下の経済での反応についてみてみよう。図２に示されるように、同じ労働投入で、より多くの消費財を供給できるようになるため、総供給曲線（(35) 式）が、反時計回りにシフトする。前述のように、伸縮経済下では、労働供給量は自然率水準で固定となるため、閉鎖経済を考えるのであれば、経済は青線と自然率の交点に落ち着く。しかし、開放経済では、総供給曲線に、τ が含まれるため、これを通じた影響も考慮しなくてはならない。最適な国内価格の設定式（(25) 式）にみられるように、生産性が上昇すると、限界費用が低下するため、P_H が低下する。一方、輸入価格 P_F については、まず、(26) 式からわかるように、P_F^* は海外では技術ショックが発生しない中、金融政策スタンスに変更はないため、変化しない。さらに、(30) 式から、名目為替相場も変化しないことがわかる。このため、P_F も変化しない。一方、海外では、P_F^* が不変のもと、P_H^* が低下する。このように、自国の技術ショックは、自国の交易条件を悪化させる一方、外国の交易条件を改善さ

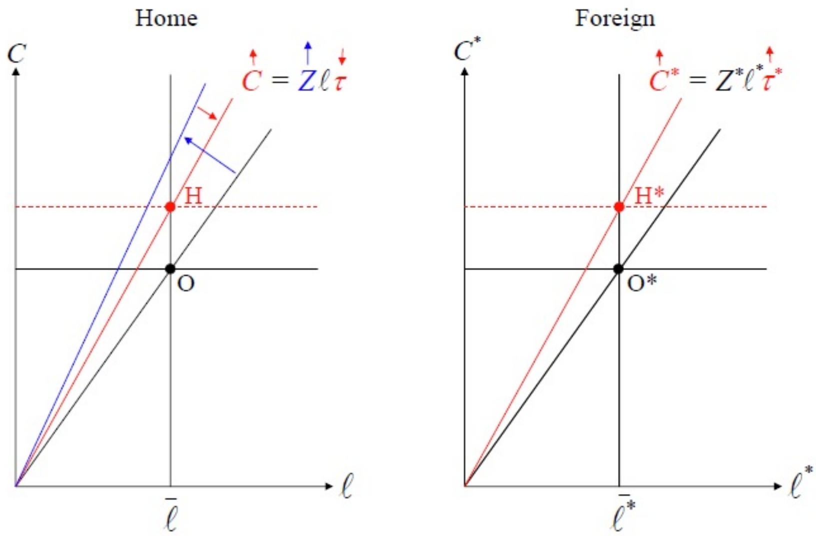

図２　伸縮価格下での技術ショックの国際波及

せる。結果として、τ は低下し、τ は上昇する。この結果、自国では、赤線と自然率との交点である H に経済がシフトし、外国では、H*にシフトすることとなる。この消費と労働供給の２次元では、効用関数が示すように、より多くの消費とより少ない労働供給の方が経済厚生が高くなる。このため、より左上の点の方が経済厚生上望ましいこととなる。価格が伸縮的な経済では、自国の経済厚生の改善が、自国の交易条件の悪化と外国の交易条件の改善を通じて、外国に対し正のスピルオーバーを発生させることがわかる。

次に、価格の粘着性のある世界では、同じショックに対し、経済がどのようにシフトするかを見てみよう。図３にそのような経済での動きをしめした。総供給曲線がシフトしても、総需要曲線（(23）式）が、金融政策スタンス一定の下、価格が変化しないため、消費水準は変わらない。結果として、経済は、同じ消費水準だが、労働供給の小さい B 点にシフトすることとなる。この価格が変化せず、金融政策スタンスも一定であれば、(30）式により、名目為替相場も変化しないため、τ、τ^* ともに変化しない。このため、自国のショックは、外国にまったくスピルオーバーしないこととなる。

3　金融政策の国際協調

図表２と図表３を比較すると、外国の経済厚生は、伸縮経済下の方が高くなることがわかる。では、自国の経済厚生はどちらの方が高いのであろうか？実際に、解をもとめ、これを効用に代入すると、伸縮経済化の効用の方が高いことがわかる。別の言い方をすると、H 点を通る無差別曲線の方が、A 点を通る無差別曲線よりも、左上に位置することとなる。このため、自国の金融政策は、B 点をできるだけ、H 点に近づけることを試みることとなる。

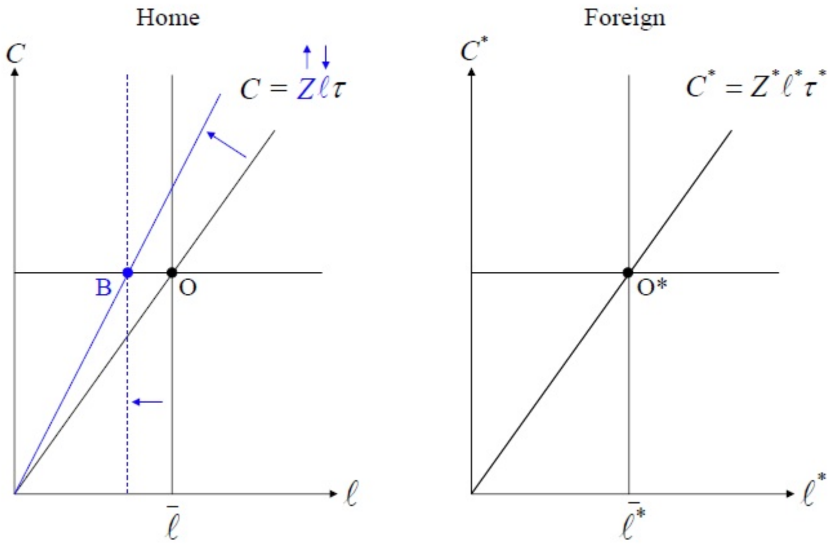

図３　粘着価格下での技術ショックの国際波及

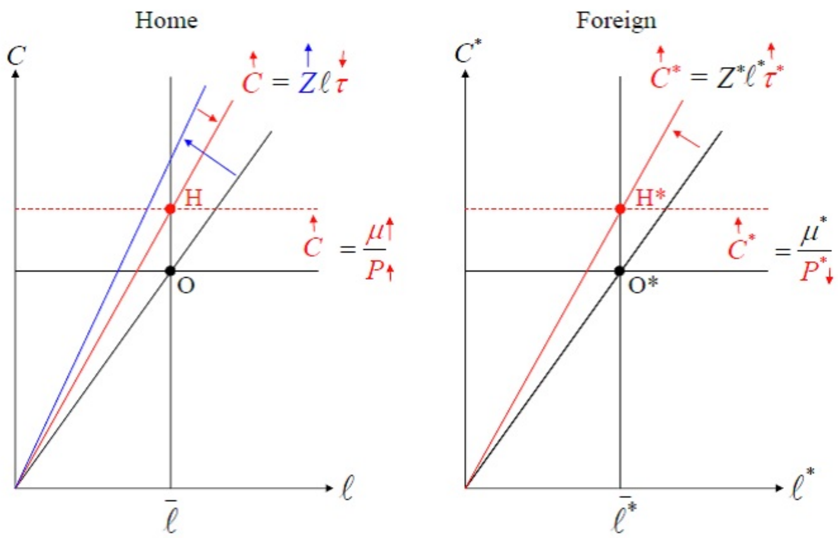

図４　PCP のケースにおける自国最適金融政策の波及

3.1　PCP

まず、PCP のケースで、このような自国の最適な金融政策が、外国にどのようにスピルオーバーするかをみてみよう。図４は、図３と同じように、まず、総供給曲線がシフトし、自国経済が青線と総需要曲線との交点にシフトしたような姿となっている。ここで、自国の金融政策が、金融政策スタンスを緩和させ、総需要曲線（赤点線）を上方にシフトさせると、消費は増加する。なお、金融政策スタンスの緩和、すなわち、μ の上昇は、（30）式に示されるように、自国通貨を減価させる。（18）、（21）式にみられるように、これは、自国の

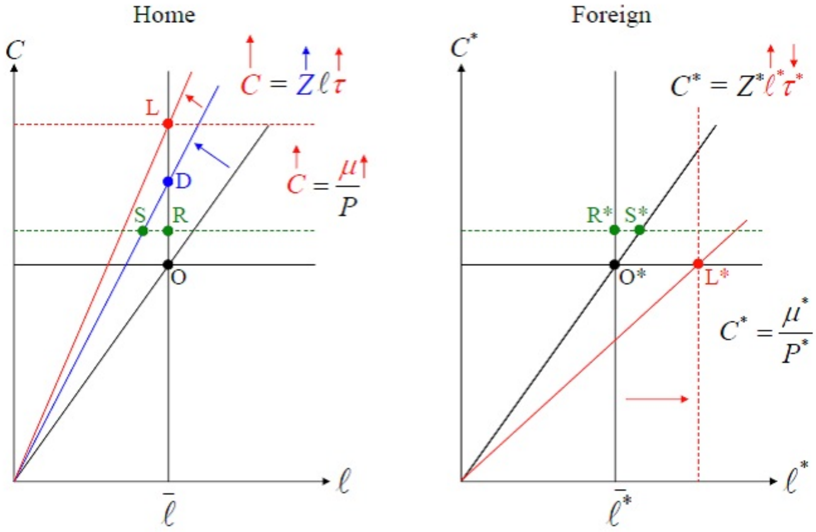

図 5　LCP のケースにおける自国最適金融政策の波及

輸入価格を上昇させるとともに、外国の輸入価格を下落させる。こうして、自国の交易条件が悪化し、外国の交易条件が改善することを意味する。別の言い方をすると、τ が下落し、τ^* が上昇する。この結果、自国の総供給曲線は、若干時計回りにシフトし、外国の総供給曲線は、反時計回りにシフトする。金融政策スタンスをうまく調節すれば、伸縮価格経済下の均衡を達成することができ、両国の経済厚生は改善する。

3.2　LCP

次に、LCP のケースについてみてみよう。図 5 も、出発点は、図 3．図 4 と同じで、青線と総需要曲線の交点である図 3 の B 点に粘着価格下の経済が位置している。

ここで、自国の金融政策が、自国の経済厚生の改善を企図し、金融スタンスを緩和させると、総需要曲線（赤点線）は上方にシフトする。ここで、PCP のケースと同様、外国の金融政策スタンスは変化しないため、自国通貨は減価する。LCP のケースでは、為替が減価しても、輸入価格に変化は生じない。一方、輸出価格も外国通貨建てでは変更されない。しかし、輸出価格は、自国通貨建てで評価されると、交易条件が改善する。一方、外国では、外国通貨建ての輸入価格、自国通貨建ての輸出価格は変化しないが、外国通貨建ての輸出価格は低下し、交易条件が悪化する。式で見ると、(39)、(40) 式が示唆するように、τ が上昇する一方、τ^* は低下する。このように、PCP と LCP は、為替相場が交易条件に与える影響がまったく逆なものとなる。この結果、自国では、総供給曲線がさらに上方にシフトし、経済厚生のより高い、L 点に経済がシフトする。一方外国では、引き続き、総需要曲線はシフトしないため、総供給曲線だけが交易条件の悪化を通じて、時計回りにシフトし、同じ消費水準だが、労働供給量の高く、経済厚生の悪化した L*点に経済がシフトする。

このように、PCP では、自国にとって最適な金融政策が外国にとっても好ましい正のスピルオーバーをもたらすが、LCP の下では、逆に負のスピルオーバーを生み出すこととなる。

4　標準モデル

ここでは、Clarida, Gali and Gertler (2001)、Engel (2009) に倣い、Calvo (1983）型の価格硬直性の下での果報経済モデルを導出する。本文中のモデルとは異なり、動学的な調整過程を描くことが可能になるため、より現実的なモデルと解釈することができる。

4.1　家計

4.1.1　自国

自国の代表的家計は、以下で定義される効用

$$\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \chi \frac{l_t^{1+\omega}}{1+\omega}$$

を、予算制約式

$$P_t C_t + \mathrm{E}_t \left(Q_{t,t+1} D_{t+1} \right) + B_{t+1} = W_t l_t + D_t + \left(1 + i_{t-1} \right) B_t + \Pi_t - \varsigma_t.$$

の下で最大化する。なお、$Q_{t,t+1}$ はアロー証券の価格、D_t はアロー証券の保有残高、B_t は自国債券残高、i_t は名目金利、Π_t は企業収益、ς_t は一括税。また、σ は相対的リスク回避度（すなわち、異時点間代替の弾力性の逆数)、ω は労働の賃金に対するフリッシュ弾力性。一階の必要条件として以下が導出される：

$$\chi h_t^{\omega} = C_t^{-\sigma} \frac{W_t}{P_t}, \tag{42}$$

$$C_t^{-\sigma} = \beta \left(1 + i_t \right) \frac{P_t}{P_{t+1}} C_{t+1}^{-\sigma}, \tag{43}$$

$$Q_{t,t+1} = \beta \frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+1}}. \tag{44}$$

なお、総消費については、CP モデルと同様、コブ・ダグラス型の集約関数を仮定する：

$$C_t = \left(\frac{C_{H,t}}{n} \right)^n \left(\frac{C_{F,t}}{1-n} \right)^{1-n}.$$

この結果、以下の（ヒックス型）需要曲線：

$$C_{H,t} = n \left(\frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{-1} C_t, \tag{45}$$

$$C_{F,t} = (1-n) \left(\frac{P_{F,t}}{P_t} \right)^{-1} C_t \tag{46}$$

が導出されるほか、一般物価水準も

$$P_t = P_{H,t}^n P_{F,t}^{1-n} \tag{47}$$

としてもとまる。さらに、CP モデルのケースと同様、国内財、海外財とも、それぞれ、以下のように、個別財を集約したものとして定義される：

$$C_{H,t} = \left[\int_0^1 C_{H,t} \left(j \right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \mathrm{d}j \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

$$C_{F,t}=\left[\int_0^1 C_{F,t}\left(j^*\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}j^*\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}.$$

この結果、個別財に対する需要関数、および個別物価指数が導出できる：

$$C_{H,t}\left(j\right)=\left[\frac{P_{H,t}\left(j\right)}{P_{H,t}}\right]^{-\varepsilon}C_{H,t},\tag{48}$$

$$C_{F,t}\left(j^*\right)=\left[\frac{P_{F,t}\left(j^*\right)}{P_{F,t}}\right]^{-\varepsilon}C_{F,t},\tag{49}$$

$$P_{H,t}=\left[\int_0^1 P_{H,t}\left(j\right)^{1-\varepsilon}\,\mathrm{d}j\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}},\tag{50}$$

$$P_{F,t}=\left[\int_0^1 P_{F,t}\left(j^*\right)^{1-\varepsilon}\,\mathrm{d}j^*\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

。

4.1.2　外国

外国についても、同様に、以下のような構造方程式が導出される：

$$\chi\left(h_t^*\right)^{\omega}=\left(C_t^*\right)^{-\sigma}\frac{W_t^*}{P_t^*},\tag{51}$$

$$\left(C_t^*\right)^{-\sigma}=\beta\frac{1+i_t^*}{1+\pi_{t+1}^*}\left(C_{t+1}^*\right)^{-\sigma},\tag{52}$$

$$Q_{t,t+1}=\beta\frac{\left(C_{t+1}^*\right)^{-\sigma}}{\left(C_t^*\right)^{-\sigma}}\frac{S_tP_t^*}{S_{t+1}P_{t+1}^*},\tag{53}$$

$$C_t^*=\left(\frac{C_{H,t}^*}{n}\right)^{n}\left(\frac{C_{F,t}^*}{1-n}\right)^{1-n},$$

$$C_{H,t}^*=n\left(\frac{P_{H,t}^*}{P_t^*}\right)^{-1}C_t^*,\tag{54}$$

$$C_{F,t}^*=\left(1-n\right)\left(\frac{P_{F,t}^*}{P_t^*}\right)^{-1}C_t^*,\tag{55}$$

$$P_t^*=\left(P_{H,t}^*\right)^{n}\left(P_{F,t}^*\right)^{1-n},\tag{56}$$

$$C_{H,t}^*=\left[\int_0^1 C_{H,t}^*\left(j\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}j\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

$$C_{F,t}^*=\left[\int_0^1 C_{F,t}^*\left(j^*\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}j^*\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

$$C_{H,t}^*\left(j\right)=\left[\frac{P_{H,t}^*\left(j\right)}{P_{H,t}^*}\right]^{-\varepsilon}C_{H,t}^*,\tag{57}$$

$$C_{F,t}(j^*) = \left[\frac{P_{F,t}(j^*)}{P_{F,t}}\right]^{-\varepsilon} C^*_{F,t},$$

$$P^*_{H,t} = \left[\int_0^1 P^*_{H,t}(j)^{1-\varepsilon}\,\mathrm{d}j\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

$$P^*_{F,t} = \left[\int_0^1 P^*_{F,t}(j^*)^{1-\varepsilon}\,\mathrm{d}j^*\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

4.1.3 リスク・シェアリング

なお、(44) と（53）式より、

$$Q_{t,t+1} = \beta\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}}\frac{P_t}{P_{t+1}} = \beta\frac{\left(C^*_{t+1}\right)^{-\sigma}}{\left(C^*_t\right)^{-\sigma}}\frac{S_t P^*_t}{S_{t+1}P^*_{t+1}}$$

となり、仮に、初期の資産（すなわち、消費水準）が両国で等しかったと仮定すると、

$$C_t^{*-\sigma} = C_t^{-\sigma}\frac{S_t P^*_t}{P_t} \tag{58}$$

となる。（58）式は、実質為替相場で調整された消費バスケットの価値（すなわち、消費からの限界効用）が両国で一致すること、または、完備な国際金融市場の下でのリスク・シェアリングを意味している。この結果、両国の（実質為替相場で調整された）限界効用は、国別に直面するショックが異なるにも拘らず、常に一致する。

4.2 企業

4.2.1 自国

各企業 j は、以下のような線形の生産技術を持ち、個別財（$Y_t(j)$) を生産する：

$$Y_t(j) = Z_t h_t(j). \tag{59}$$

ここで、企業の（名目）限界費用は、以下で定義される総費用関数のラグランジュ乗数として表現される：

$$W_t Y_t(j) + NMC_t\left[Y_t(j) - Z_t h_t(j)\right].$$

費用最小化問題の結果から、限界費用は以下のように導出される：

$$NMC_t = \frac{W_t}{Z_t}. \tag{60}$$

なお、個別財は国内と海外で販売されたものの合計となるため、以下の資源制約が成立する[*4]：

$$nY_t(j) = nC_{H,t}(j) + (1-n)\,C^*_{H,t}(j). \tag{61}$$

ここで、個別財を集計して、一国全体の資源制約を考えてみよう。（59）式で表現される個別の生産関数は、一国全体では以下のように集約される：

$$\int_0^1 Y_t(j)\,\mathrm{d}j = Z_t\int_0^1 h_t(j)\,\mathrm{d}j.$$

[*4] 厳密には、本モデルは一人当たりで全ての変数を表現するため、それぞれに、国のサイズ 0.5 が係数としてかかることとなる。

この式に、(48)、(57)、(61) 式を代入すると、

$$
\begin{aligned}
& n\int_0^1 C_{H,t}(j)\,\mathrm{d}j+(1-n)\int_0^1 C^*_{H,t}(j)\,\mathrm{d}j \\
&= nC_{H,t}\int_0^1\left[\frac{P_{H,t}(j)}{P_{H,t}}\right]^{-\varepsilon}\mathrm{d}j+(1-n)\,C^*_{H,t}\int_0^1\left[\frac{P^*_{H,t}(j)}{P^*_{H,t}}\right]^{-\varepsilon}\mathrm{d}j \\
&= n\Delta_{H,t}C_{H,t}+(1-n)\,\Delta^*_{H,t}C^*_{H,t} \\
&= nY_t
\end{aligned} \tag{62}
$$

が導出できる。なお、

$$
\Delta_{H,t}=\int_0^1\left[\frac{P_{H,t}(j)}{P_{H,t}}\right]^{-\varepsilon}\mathrm{d}j,
$$

$$
\Delta^*_{H,t}=\int_0^1\left[\frac{P^*_{H,t}(j)}{P^*_{H,t}}\right]^{-\varepsilon}\mathrm{d}j,
$$

$$
Y_t=\int_0^1 Y_t(j)\,\mathrm{d}j=Z_th_t=Z_t\int_0^1 h_t(j)\,\mathrm{d}j. \tag{63}
$$

各企業 j が、毎期、$1-\theta$ の確率で価格を変更できるような Calvo (1983) 型の価格粘着性の下では、

$$
\begin{aligned}
\Delta_{H,t} &= (1-\theta)\left(\frac{\bar{P}_{H,t}}{P_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}+\theta\int_0^1\left[\frac{P_{H,t-1}(j)}{P_{H,t}}\right]^{-\varepsilon}\mathrm{d}j \\
&= (1-\theta)\left(\frac{\bar{P}_{H,t}}{P_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}+\theta\left(\frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}\int_0^1\left[\frac{P_{H,t-1}(j)}{P_{H,t-1}}\right]^{-\varepsilon}\mathrm{d}j \\
&= (1-\theta)\left(\frac{\bar{P}_{H,t}}{P_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}+\theta\left(\frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}\int_0^1\left[\frac{P_{H,t-1}(j)}{P_{H,t-1}}\right]^{-\varepsilon}\mathrm{d}j.
\end{aligned}
$$

となる。なお、$\bar{P}_H$ は価格変更が可能なときに設定される価格。また、(50) 式より、同時に、

$$
P^{1-\varepsilon}_{H,t}=(1-\theta)\,\bar{P}^{1-\varepsilon}_{H,t}+\theta P^{1-\varepsilon}_{H,t-1}, \tag{64}
$$

画成立する。結果として、

$$
\Delta_{H,t}=(1-\theta)\left[\frac{1-\theta\left(\frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}+\theta\left(\frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}\Delta_{H,t-1}, \tag{65}
$$

$$
\Delta^*_{H,t}=(1-\theta)\left[\frac{1-\theta\left(\frac{P^*_{H,t-1}}{P^*_{H,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}+\theta\left(\frac{P^*_{H,t-1}}{P^*_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}\Delta^*_{H,t-1} \tag{66}
$$

が成立する。

ここで、Calvo (1983) 型の価格粘着性の下での、各企業の最適価格設定行動を考えてみよう。自国企業は、将来価格を変更できない可能性も考慮しながら、自国で消費される自国生産財の価格 ($\bar{P}_{H,t}$) を設定する。すなわち、以下で定義される利潤の割引現在価値を最大化するように価格を設定する[*5]：

$$
\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k\,\mathrm{E}_t\frac{C^{-\sigma}_{t+k}}{C^{-\sigma}_t}\frac{P_t}{P_{t+k}}\left[(1+\tau)\,\bar{P}_{H,t}C_{H,t+k}(j)-NMC_{t+k}C_{H,t+k}(j)\right].
$$

[*5] ここで定義される国内向け価格設定から得られる利潤と、明示はしないが、海外向け価格設定から得られる利潤の合計 (Π) が、企業を保有する家計に帰属する。

なお、$\tau \mathsf{P}_{H,t} C_{H,t+k}(j)$ は政府からの生産補助金。ここで、(48) 式を代入すると、利潤の割引現在価値は以下のように変形される：

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \mathrm{E}_t \frac{C_{t+k}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+k}} C_{H,t+k} \left[(1+\tau) \bar{P}_{H,t} \left(\frac{\bar{P}_{H,t}}{P_{H,t+k}} \right)^{-\varepsilon} - NMC_{t+k} \left(\frac{\bar{P}_{H,t}}{P_{H,t+k}} \right)^{-\varepsilon} \right].$$

一階の必要条件として、

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{P}_{H,t}}{P_{H,t}} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mathrm{E}_t \beta^k \frac{C_{t+k}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+k}} C_{H,t+k} \left(\frac{P_{H,t+k}}{P_{H,t}} \right)^{\varepsilon} \\ &= \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1+\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mathrm{E}_t \beta^k \frac{C_{t+k}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+k}} C_{H,t+k} \left(\frac{P_{H,t+k}}{P_{H,t}} \right)^{\varepsilon+1} \frac{NMC_{t+k}}{P_{H,t+k}} \end{aligned}$$

が導出される。ここで、左辺と右辺について、

$$F_{H,t}^p \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mathrm{E}_t \beta^k \frac{C_{t+k}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+k}} \frac{C_{H,t+k}}{C_{H,t}} \left(\frac{P_{H,t+k}}{P_{H,t}} \right)^{\varepsilon},$$

$$K_{H,t}^p \equiv \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1+\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mathrm{E}_t \beta^k \frac{C_{t+k}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+k}} \frac{C_{H,t+k}}{C_{H,t}} \left(\frac{P_{H,t+k}}{P_{H,t}} \right)^{\varepsilon+1} \frac{NMC_{t+k}}{P_{H,t+k}}$$

と定義すると、一階の条件は、(64) 式を用いると、

$$K_{H,t}^p = F_{H,t}^p \frac{\bar{P}_{H,t}}{P_{H,t}} = F_{H,t}^p \left[\frac{1-\theta \left(\frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t}} \right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \tag{67}$$

となる。なお、$F_{H,t}^p$、$K_{H,t}^p$ についても、シミュレーションのため、再起的構造で表現すると、それぞれ、

$$F_{H,t}^p = 1 + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{C_{H,t+1}}{C_{H,t}} \left(\frac{P_{H,t+1}}{P_{H,t}} \right)^{\varepsilon} F_{H,t+1}^p, \tag{68}$$

$$K_{H,t}^p = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1+\tau)} \frac{NMC_t}{P_{H,t}} + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{C_{H,t+1}}{C_{H,t}} \left(\frac{P_{H,t+1}}{P_{H,t}} \right)^{\varepsilon+1} K_{H,t+1}^p \tag{69}$$

となる。

ここで、海外販売価格の設定を考えよう。PCP に従う場合は、

$$P_{H,t}^* = \frac{P_{H,t}}{S_t} \tag{70}$$

が成り立つ。一方、LCP のケースでは、為替変動リスクも睨みながら、以下で定義される利潤の割引現在価値を最大化するように、価格（$\mathsf{P}_{H,t}^*$）を設定する：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mathrm{E}_t \beta^k \frac{C_{t+k}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+k}} C_{H,t+k}^* \left[(1+\tau) \mathsf{P}_{H,t}^* \left(\frac{\mathsf{P}_{H,t}^*}{P_{H,t+k}^*} \right)^{1-\varepsilon} - \frac{NMC_{t+k}}{S_{t+k}} \left(\frac{\mathsf{P}_{H,t}^*(j)}{P_{H,t+k}^*} \right)^{-\varepsilon} \right].$$

一階の必要条件として、

$$K_{H,t}^{*p} = F_{H,t}^{*p} \left[\frac{1-\theta \left(\frac{P_{H,t-1}^*}{P_{H,t}^*} \right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \tag{71}$$

$$F_{H,t}^{*p} = 1 + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{C_{H,t+1}^*}{C_{H,t}^*} \left(\frac{P_{H,t+1}^*}{P_{H,t}^*} \right)^{\varepsilon} F_{H,t+1}^{*p}, \tag{72}$$

$$K_{H,t}^{*p} = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1)(1 + \tau)} \frac{NMC_t}{S_t P_{H,t}^*} + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{C_{H,t+1}^*}{C_{H,t}^*} \left(\frac{P_{H,t+1}^*}{P_{H,t}^*} \right)^{\varepsilon+1} K_{H,t+1}^{*p} \tag{73}$$

が導出できる。

4.2.2 外国

外国企業についても、同様に、

$$NMC_t^* = \frac{W_t^*}{Z_t^*}, \tag{74}$$

$$\begin{aligned} & nC_{F,t} \int_0^n \left[\frac{P_{F,t}(j)}{P_{F,t}} \right]^{-\varepsilon} \mathrm{d}j + (1-n) C_{F,t}^* \int_n^1 \left[\frac{P_{F,t}^*(j)}{P_{F,t}^*} \right]^{-\varepsilon} \mathrm{d}j \\ & = n\Delta_{F,t} C_{F,t} + (1-n) \Delta_{F,t}^* C_{F,t}^* = (1-n) Y_t^*, \end{aligned} \tag{75}$$

$$Y_t^* = Z_t^* h_t^*, \tag{76}$$

$$\Delta_{F,t} = (1-\theta) \left[\frac{1 - \theta \left(\frac{P_{F,t-1}}{P_{F,t}} \right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}} + \theta \left(\frac{P_{F,t-1}}{P_{F,t}} \right)^{-\varepsilon} \Delta_{F,t-1}, \tag{77}$$

$$\Delta_{F,t}^* = (1-\theta) \left[\frac{1 - \theta \left(\frac{P_{F,t-1}^*}{P_{F,t}^*} \right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}} + \theta \left(\frac{P_{F,t-1}^*}{P_{F,t}^*} \right)^{-\varepsilon} \Delta_{F,t-1}^*, \tag{78}$$

$$\begin{aligned} K_{F,t}^{*p} &= F_{F,t}^{*p} \frac{\bar{P}_{F,t}^*}{P_{F,t}^*} \\ &= F_{F,t}^{*p} \left[\frac{1 - \theta \left(\frac{P_{F,t-1}^*}{P_{F,t}^*} \right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{79}$$

$$F_{F,t}^{*p} = 1 + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C_{t+1}^{*-\sigma}}{C_t^{*-\sigma}} \frac{P_t^*}{P_{t+1}^*} \frac{C_{F,t+1}^*}{C_{F,t}^*} \left(\frac{P_{F,t+1}^*}{P_{F,t}^*} \right)^{\varepsilon} F_{H,t+1}^{*p}, \tag{80}$$

$$K_{F,t}^{*p} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1 (1 + \tau^*)} \frac{NMC_t^*}{P_{F,t}^*} + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C_{t+1}^{*-\sigma}}{C_t^{*-\sigma}} \frac{P_t^*}{P_{t+1}^*} \frac{C_{F,t+1}^*}{C_{F,t}^*} \left(\frac{P_{F,t+1}^*}{P_{F,t}^*} \right)^{\varepsilon+1} K_{F,t+1}^{*p} \tag{81}$$

が導出できる。

自国での海外生産財の価格設定については、PCP の下では、

$$P_{F,t} = S_t P_{F,t}^* \tag{82}$$

となる。一方、LCP の下では、価格のダイナミクスは、以下の 3 式によって規定される：

$$K_{F,t}^{p}=F_{F,t}^{p}\left[\frac{1-\theta\left(\frac{P_{F,t-1}}{P_{F,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \tag{83}$$

$$F_{F,t}^{p}=1+\theta\beta\mathrm{E}_{t}\frac{C_{t+1}^{*-\sigma}}{C_{t}^{*-\sigma}}\frac{P_{t}^{*}}{P_{t+1}^{*}}\frac{C_{F,t+1}}{C_{F,t}}\frac{S_{t}}{S_{t+1}}\left(\frac{P_{F,t+1}}{P_{F,t}}\right)^{\varepsilon}F_{F,t+1}^{p}, \tag{84}$$

$$K_{F,t}^{p}=\frac{\varepsilon\left(1-\tau\right)}{\varepsilon-1}\frac{S_{t}NMC_{t}^{*}}{P_{F,t}}+\theta\beta\mathrm{E}_{t}\frac{C_{t+1}^{*-\sigma}}{C_{t}^{*-\sigma}}\frac{P_{t}^{*}}{P_{t+1}^{*}}\frac{C_{F,t+1}}{C_{F,t}}\frac{S_{t}}{S_{t+1}}\left(\frac{P_{F,t+1}}{P_{F,t}}\right)^{\varepsilon+1}K_{F,t+1}^{p}. \tag{85}$$

4.3 政府

両国の財政政策は、家計より一括税を徴収し、定常状態におけるマークアップをゼロとするように補助金をセットする

$$\tau\bar{P}_{H,t}C_{H,t+k}\left(j\right)=\varsigma_{t},$$

$$\tau\bar{P}_{F,t}^{*}C_{F,t+k}^{*}\left(j\right)=\varsigma_{t}^{*}.$$

また、両国の中央銀行は、以下で定義される社会損失関数を最小化するように、名目金利を設定する。

4.4 モデル

PCP の下では、モデルは、両国の金融政策ルールと、(42)、(43)、(**??**)、(46)、(6)、(51)、(52)、(54)、(55)、(56)、(58)、(60)、(62)、(63)、(65)、(66)、(67)、(68)、(69)、(70)、(74)、(75)、(76)、(77)、(78)、(79)、(80)、(82) 式が、モデルを構成する。

一方、LCP の下では、モデルは、両国の金融政策ルールと、(42)、(43)、(**??**)、(46)、(6)、(51)、(52)、(54)、(55)、(56)、(58)、(60)、(62)、(63)、(65)、(66)、(67)、(68)、(69)、(71)、(72)、(73)、(74)、(75)、(76)、(77)、(78)、(79)、(80)、(83)、(84)、(85) 式が、モデルを構成する。

本モデルでは、金融政策は、一般物価水準の異時点間相対価格、すなわち、インフレ率を決定する。このため、全ての名目変数については、以下のような相対価格で表現する：

$$p_{H,t}=\frac{P_{H,t}}{P_{t}},$$

$$p_{F,t}=\frac{P_{F,t}}{P_{t}},$$

$$p_{H,t}^{*}=\frac{P_{H,t}^{*}}{P_{t}^{*}},$$

$$p_{F,t}^{*}=\frac{P_{F,t}^{*}}{P_{t}^{*}},$$

$$w_{t}=\frac{W_{t}}{P_{t}},$$

$$w_{t}^{*}=\frac{W_{t}^{*}}{P_{t}^{*}},$$

$$\mu_t = \frac{NMC_t}{P_t},$$

$$\mu_t^* = \frac{NMC_t^*}{P_t^*},$$

$$e_t = \frac{S_t P_t^*}{P_t},$$

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = 1 + \pi_t,$$

$$\frac{P_t^*}{P_{t-1}^*} = 1 + \pi_t^*,$$

$$\frac{P_{H,t}}{P_{H,t-1}} = 1 + \pi_{H,t},$$

$$\frac{P_{H,t}^*}{P_{H,t-1}^*} = 1 + \pi_{H,t}^*,$$

$$\frac{P_{F,t}^*}{P_{F,t-1}^*} = 1 + \pi_{F,t}^*,$$

$$\frac{P_{F,t}}{P_{F,t-1}} = 1 + \pi_{F,t}.$$

4.4.1 トレンド除去後のモデル

上記のルールに則り、トレンド除去されたモデルは以下の通り。

$$\chi h_t^{\omega} = C_t^{-\sigma} w_t, \tag{86}$$

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathrm{E}_t \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} C_{t+1}^{-\sigma}, \tag{87}$$

$$C_{H,t} = n p_{H,t}^{-1} C_t, \tag{88}$$

$$C_{F,t} = (1-n)\, p_{F,t}^{-1} C_t, \tag{89}$$

$$1 = p_{H,t}^{n} p_{F,t}^{1-n}, \tag{90}$$

$$\chi \left(h_t^*\right)^{\omega} = \left(C_t^*\right)^{-\sigma} w_t^*, \tag{91}$$

$$\left(C_t^*\right)^{-\sigma} = \beta \mathrm{E}_t \frac{1+i_t^*}{1+\pi_{t+1}^*} \left(C_{t+1}^*\right)^{-\sigma}, \tag{92}$$

$$C_{H,t}^* = n p_{H,t}^{*-1} C_t^*, \tag{93}$$

$$C_{F,t}^* = (1-n)\, p_{F,t}^{*-1} C_t^*, \tag{94}$$

$$1 = \left(p_{H,t}^*\right)^{n} \left(p_{F,t}^*\right)^{1-n}, \tag{95}$$

$$C_t^{*-\sigma} = C_t^{-\sigma} e_t, \tag{96}$$

$$\mu_t = \frac{w_t}{Z_t}, \tag{97}$$

$$n\Delta_{H,t}C_{H,t} + (1-n)\,\Delta^*_{H,t}C^*_{H,t} = nY_t, \tag{98}$$

$$Y_t = Z_t h_t, \tag{99}$$

$$\Delta_{H,t} = (1-\theta)\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi_{H,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} + \theta\left(\frac{1}{1+\pi_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}\Delta_{H,t-1}, \tag{100}$$

$$\Delta^*_{H,t} = (1-\theta)\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi^*_{H,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} + \theta\left(\frac{1}{1+\pi^*_{H,t}}\right)^{-\varepsilon}\Delta^*_{H,t-1}, \tag{101}$$

$$K^p_{H,t} = F^p_{H,t}\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi_{H,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \tag{102}$$

$$F^p_{H,t} = 1 + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C^{-\sigma}_{t+1}}{C^{-\sigma}_t}\frac{(1+\pi_{H,t+1})^{\varepsilon}}{1+\pi_{t+1}}\frac{C_{H,t+1}}{C_{H,t}}F^p_{H,t+1}, \tag{103}$$

$$K^p_{H,t} = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1+\tau)}\frac{\mu_t}{p_{H,t}} + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C^{-\sigma}_{t+1}}{C^{-\sigma}_t}\frac{(1+\pi_{H,t+1})^{\varepsilon+1}}{1+\pi_{t+1}}\frac{C_{H,t+1}}{C_{H,t}}K^p_{H,t+1}, \tag{104}$$

$$\mu^*_t = \frac{w^*_t}{Z^*_t}, \tag{105}$$

$$n\Delta_{F,t}C_{F,t} + (1-n)\,\Delta^*_{F,t}C^*_{F,t} = (1-n)\,Y^*_t, \tag{106}$$

$$Y^*_t = Z^*_t h^*_t, \tag{107}$$

$$\Delta_{F,t} = (1-\theta)\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi_{F,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} + \theta\left(\frac{1}{1+\pi_{F,t}}\right)^{-\varepsilon}\Delta_{F,t-1}, \tag{108}$$

$$\Delta^*_{F,t} = (1-\theta)\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi^*_{F,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} + \theta\left(\frac{1}{1+\pi^*_{F,t}}\right)^{-\varepsilon}\Delta^*_{F,t-1}, \tag{109}$$

$$K^{*p}_{F,t} = F^{*p}_{F,t}\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi^*_{F,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \tag{110}$$

$$F^{*p}_{F,t} = 1 + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C^{*-\sigma}_{t+1}}{C^{*-\sigma}_t}\frac{\left(1+\pi^*_{F,t+1}\right)^{\varepsilon}}{1+\pi^*_{t+1}}\frac{C^*_{F,t+1}}{C^*_{F,t}}F^{*p}_{H,t+1}, \tag{111}$$

$$K^{*p}_{F,t} = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1+\tau)}\frac{\mu^*_t}{p^*_{F,t}} + \theta\beta \mathrm{E}_t \frac{C^{*-\sigma}_{t+1}}{C^{*-\sigma}_t}\frac{\left(1+\pi^*_{F,t+1}\right)^{\varepsilon+1}}{1+\pi^*_{t+1}}\frac{C^*_{F,t+1}}{C^*_{F,t}}K^{*p}_{F,t+1}, \tag{112}$$

$$1+\pi_{H,t} = (1+\pi_t)\,\frac{p_{H,t}}{p_{H,t-1}}, \tag{113}$$

$$1+\pi^*_{H,t}=(1+\pi^*_t)\frac{p^*_{H,t}}{p^*_{H,t-1}}, \tag{114}$$

$$1+\pi^*_{F,t}=(1+\pi^*_t)\frac{p^*_{F,t}}{p^*_{F,t-1}}, \tag{115}$$

$$1+\pi_{F,t}=(1+\pi_t)\frac{p_{F,t}}{p_{F,t-1}}. \tag{116}$$

なお、以下については、輸出品価格の決定式となるため、PCP、LCP で構造方程式が異なる。PCP 下では、（86）から（116）式に、以下の 2 式：

$$p^*_{H,t}=\frac{p_{H,t}}{e_t}, \tag{117}$$

$$p_{F,t}=e_t p^*_{F,t} \tag{118}$$

を、LCP 下では、以下の 6 式：

$$K^{*p}_{H,t}=F^{*p}_{H,t}\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi^*_{H,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \tag{119}$$

$$F^{*p}_{H,t}=1+\theta\beta\mathrm{E}_t\frac{C^{-\sigma}_{t+1}}{C^{-\sigma}_t}\frac{\left(1+\pi^*_{H,t+1}\right)^{\varepsilon}}{1+\pi_{t+1}}\frac{C^*_{H,t+1}}{C^*_{H,t}}F^{*p}_{H,t+1}, \tag{120}$$

$$K^{*p}_{H,t}=\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1+\tau)}\frac{\mu_t}{e_t p^*_{H,t}}+\theta\beta\mathrm{E}_t\frac{C^{-\sigma}_{t+1}}{C^{-\sigma}_t}\frac{\left(1+\pi^*_{H,t+1}\right)^{\varepsilon+1}}{1+\pi_{t+1}}\frac{C^*_{H,t+1}}{C^*_{H,t}}K^{*p}_{H,t+1}, \tag{121}$$

$$K^{p}_{F,t}=F^{p}_{F,t}\left[\frac{1-\theta\left(\frac{1}{1+\pi_{F,t}}\right)^{1-\varepsilon}}{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \tag{122}$$

$$F^{p}_{F,t}=1+\theta\beta\mathrm{E}_t\frac{C^{*-\sigma}_{t+1}}{C^{*-\sigma}_t}\frac{(1+\pi_{F,t+1})^{\varepsilon}}{1+\pi^*_{t+1}}\frac{C_{F,t+1}}{C_{F,t}}\frac{S_t}{S_{t+1}}F^{p}_{F,t+1}, \tag{123}$$

$$K^{p}_{F,t}=\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)(1+\tau)}\frac{e_t\mu^*_t}{p_{F,t}}+\theta\beta\mathrm{E}_t\frac{C^{*-\sigma}_{t+1}}{C^{*-\sigma}_t}\frac{(1+\pi_{F,t+1})^{\varepsilon+1}}{1+\pi^*_{t+1}}\frac{C_{F,t+1}}{C_{F,t}}\frac{S_t}{S_{t+1}}K^{p}_{F,t+1}, \tag{124}$$

を加え、金融政策ルールを考慮したものが全ての内生変数のパスを決定する。

4.4.2 定常状態

全ての相対価格が 1 となるような定常状態を求めると、以下の通り。

$$\pi=0,$$

$$\pi^*=0,$$

$$\pi_H=0,$$

$$\pi^*_H=0,$$

$$\pi^*_F=0,$$

$$\pi_F = 0,$$

$$p_H = 1,$$

$$p_H^* = 1,$$

$$p_F = 1,$$

$$p_F^* = 1,$$

$$i = \frac{1-\beta}{\beta},$$

$$i^* = \frac{1-\beta}{\beta},$$

$$\Delta_H = 1,$$

$$\Delta_{H,t}^* = 1,$$

$$\Delta_{F,t} = 1,$$

$$\Delta_{F,t}^* = 1,$$

$$e = 1,$$

$$K_H^p = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$F_{H,t}^p = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$K_H^{*p} = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$F_{H,t}^{*p} = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$K_F^{*p} = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$F_{F,t}^{*p} = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$K_F^p = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$F_{F,t}^p = \frac{1}{1-\theta\beta},$$

$$\mu = \frac{(\varepsilon-1)(1+\tau)}{\varepsilon},$$

$$\mu_t^* = \frac{(\varepsilon-1)(1+\tau)}{\varepsilon},$$

$$w = \frac{(\varepsilon-1)(1+\tau)}{\varepsilon},$$

$$w_t^* = \frac{(\varepsilon-1)(1+\tau)}{\varepsilon},$$

$$h = \left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}},$$

$$h^* = \left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}},$$

$$Y = \left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}}, \tag{125}$$

$$Y^* = \left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}},$$

$$C = \left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}}, \tag{126}$$

$$C^* = \left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}},$$

$$C_H = n\left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}},$$

$$C_F = (1-n)\left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}},$$

$$C_H^* = n\left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}},$$

$$C_F^* = \frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\left[\frac{\chi(\varepsilon - 1)(1+\tau)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\omega+\sigma}}.$$

4.4.3　対数線形近似モデル 1

（86）から（124）式を、定常状態周りで対数線形近似、すなわち、レベル変数については $\frac{\Gamma_t - \Gamma}{\Gamma} \approx \hat{\gamma}_t$、一方、変化率変数については $\gamma_t - \gamma \approx \hat{\gamma}_t$ となるような変換を行うと、以下の通り。なお、導出に当たっては、上記の定常状態の値も利用する。

$$\omega \hat{h}_t = -\sigma \hat{C}_t + \hat{w}_t, \tag{127}$$

$$-\sigma \hat{C}_t = \tilde{\imath}_t - \mathrm{E}_t \hat{\pi}_{t+1} - \sigma \mathrm{E}_t \hat{C}_{t+1}, \tag{128}$$

$$\hat{C}_{H,t} = -\hat{p}_{H,t} + \hat{C}_t, \tag{129}$$

$$\hat{C}_{F,t} = -\hat{p}_{F,t} + \hat{C}_t, \tag{130}$$

$$0 = n\hat{p}_{H,t} + (1-n)\,\hat{p}_{F,t}, \tag{131}$$

$$\omega \hat{h}_t^* = -\sigma \hat{C}_t^* + \hat{w}_t^*, \tag{132}$$

$$-\sigma \hat{C}_t^* = \hat{\imath}_t^* - \mathrm{E}_t \hat{\pi}_{t+1}^* - \sigma \mathrm{E}_t \hat{C}_{t+1}^*, \tag{133}$$

$$\hat{C}_{H,t}^* = -\hat{p}_{H,t}^* + \hat{C}_t^*, \tag{134}$$

$$\hat{C}_{F,t}^* = -\hat{p}_{F,t}^* + \hat{C}_t^*, \tag{135}$$

$$0 = n\hat{p}^*_{H,t} + (1-n)\,\hat{p}^*_{F,t}, \tag{136}$$

$$-\sigma\hat{C}^*_t = -\sigma\hat{C}_t + \hat{e}_t, \tag{137}$$

$$\hat{\mu}_t = \hat{w}_t - \hat{Z}_t, \tag{138}$$

$$n\hat{\Delta}_{H,t} + n\hat{C}_{H,t} + (1-n)\,\hat{\Delta}^*_{H,t} + (1-n)\,\hat{C}^*_{H,t} = \hat{Y}_t, \tag{139}$$

$$\hat{Y}_t = \hat{h}_t + \hat{Z}_t, \tag{140}$$

$$\hat{\Delta}_{H,t} = \theta\hat{\Delta}_{H,t-1}, \tag{141}$$

$$\hat{\Delta}^*_{H,t} = \theta\hat{\Delta}^*_{H,t-1}, \tag{142}$$

$$\hat{K}^p_{H,t} = \hat{F}^p_{H,t} + \frac{\theta}{1-\theta}\hat{\pi}_{H,t}, \tag{143}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}^p_{H,t} = &-\sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}_t + \varepsilon\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{H,t+1} - \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{t+1} \\ &+ \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{H,t+1} - \theta\beta\hat{C}_{H,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{F}^p_{H,t+1},\end{aligned} \tag{144}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}^p_{H,t} = &(1-\theta\beta)\,\hat{\mu}_t - (1-\theta\beta)\,\widehat{p}_{H,t} - \sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}_t \\ &+ (\varepsilon+1)\,\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{H,t+1} - \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{t+1} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{H,t+1} - \theta\beta\hat{C}_{H,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{K}^p_{H,t+1},\end{aligned} \tag{145}$$

$$\hat{\mu}^*_t = \hat{w}^*_t - \hat{Z}^*_t, \tag{146}$$

$$n\hat{\Delta}_{F,t} + n\hat{C}_{F,t} + (1-n)\,\hat{\Delta}^*_{F,t} + (1-n)\,\hat{C}^*_{F,t} = \hat{Y}^*_t, \tag{147}$$

$$\hat{Y}^*_t = \hat{h}^*_t + \hat{Z}^*_t, \tag{148}$$

$$\hat{\Delta}_{F,t} = \theta\hat{\Delta}_{F,t-1}, \tag{149}$$

$$\hat{\Delta}^*_{F,t} = \theta\hat{\Delta}^*_{F,t-1}, \tag{150}$$

$$\hat{K}^{*p}_{F,t} = \hat{F}^{*p}_{F,t} + \frac{\theta}{1-\theta}\tilde{\pi}^*_{F,t}, \tag{151}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}^{*p}_{F,t} = &-\sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}^*_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}^*_t + \varepsilon\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{F,t+1} \\ &- \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{t+1} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}^*_{F,t+1} - \theta\beta\hat{C}^*_{F,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{F}^{*p}_{F,t+1},\end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}^{*p}_{F,t} = &(1-\theta\beta)\,\hat{\mu}^*_t - (1-\theta\beta)\,\widehat{p}^*_{F,t} - \sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}^*_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}^*_t \\ &+ (\varepsilon+1)\,\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{F,t+1} - \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{t+1} + \theta\beta\hat{C}^*_{F,t+1} - \theta\beta\hat{C}^*_{F,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{K}^{*p}_{F,t+1},\end{aligned} \tag{153}$$

$$\hat{\pi}_{H,t} = \hat{\pi}_t + \hat{p}_{H,t} - \hat{p}_{H,t-1}, \tag{154}$$

$$\hat{\pi}^*_{H,t} = \hat{\pi}^*_t + \hat{p}^*_{H,t} - \hat{p}^*_{H,t-1}, \tag{155}$$

$$\hat{\pi}^*_{F,t} = \hat{\pi}^*_t + \hat{p}^*_{F,t} - \hat{p}^*_{F,t-1}, \tag{156}$$

$$\hat{\pi}_{F,t} = \hat{\pi}_t + \hat{p}_{F,t} - \hat{p}_{F,t-1}, \tag{157}$$

PCP 下では、(127) から (157) 式に、以下の 2 式：

$$\hat{p}^*_{H,t} = \hat{p}_{H,t} - \hat{e}_t, \tag{158}$$

$$\hat{p}_{F,t} = \hat{e}_t + \hat{p}^*_{F,t} \tag{159}$$

を、LCP 下では、以下の 6 式：

$$\hat{K}^{*p}_{H,t} = \hat{F}^{*p}_{H,t} + \frac{\theta}{1-\theta}\hat{\pi}^*_{H,t}, \tag{160}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}^{*p}_{H,t} = &-\sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}_t + \varepsilon\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{H,t+1} - \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{t+1} \\ &+ \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}^*_{H,t+1} - \theta\beta\hat{C}^*_{H,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{F}^{*p}_{H,t+1},\end{aligned} \tag{161}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}^{*p}_{H,t} = &\left(1-\theta\beta\right)\hat{\mu}_t - \left(1-\theta\beta\right)\widehat{p}^*_{H,t} - \left(1-\theta\beta\right)\hat{e}_t - \sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}_t \\ &+ \left(\varepsilon+1\right)\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{H,t+1} - \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{t+1} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}^*_{H,t+1} - \theta\beta\hat{C}^*_{H,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{K}^{*p}_{H,t+1},\end{aligned} \tag{162}$$

$$\hat{K}^p_{F,t} = \hat{F}^p_{F,t} + \frac{\theta}{1-\theta}\hat{\pi}_{F,t}, \tag{163}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}^p_{F,t} = &-\sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}^*_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}^*_t + \varepsilon\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{F,t+1} - \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{t+1} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{F,t+1} - \theta\beta\hat{C}_{F,t} \\ &+ \theta\beta\hat{S}_{F,t} - \theta\beta\hat{S}_{F,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{F}^p_{F,t+1},\end{aligned} \tag{164}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}^p_{F,t} = &\left(1-\theta\beta\right)\hat{\mu}^*_t + \left(1-\theta\beta\right)\hat{e}_t - \left(1-\theta\beta\right)\widehat{p}_{F,t} - \sigma\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}^*_{t+1} + \sigma\theta\beta\hat{C}^*_t \\ &+ \left(\varepsilon+1\right)\theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{F,t+1} - \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}^*_{t+1} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{C}_{F,t+1} - \theta\beta\hat{C}_{F,t} + \theta\beta\hat{S}_{F,t} \\ &- \theta\beta\hat{S}_{F,t} + \theta\beta\mathrm{E}_t\hat{K}^p_{F,t+1}.\end{aligned} \tag{165}$$

4.4.4 対数線形近似モデル 2

上記、(127)〜(159) 式、ないし、(127)〜(158) と (163) 〜 (165) 式によって構成されるモデルでも、これに金融政策ルールを加えれることによって、合理的期待均衡を求めることができる。しかし、式の数が多く、直感的な理解が難しくなるため、ここでは、式の数を減らすことを試みる。具体的には、以下で導かれる関係を利用するとともに、モデル内で代入を繰り返すことにより、より直観的でわかりやすいモデルにする。

価格変動に伴う歪み　(141)、(142)、(149)、(150) 式より、

$$\hat{\Delta}_{H,t} = 0,$$

$$\hat{\Delta}^*_{H,t} = 0,$$

$$\hat{\Delta}_{F,t} = 0,$$

$$\hat{\Delta}^*_{F,t} = 0$$

となる。一次近似する限りにおいては、価格変動に伴う歪みは生じない。このため、以下に示すように、損失関数は、効用関数および構造方程式を二次近似することによって導出する。

ニュー・ケインジアン・フィリップス曲線　(143)、(144)、(145) 式より、いわゆるニュー・ケインジアン・フィリップス曲線を導出できる：

$$\hat{\pi}_{H,t} = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left(\hat{\mu}_t - \hat{p}_{H,t}\right) + \beta \mathrm{E}_t \hat{\pi}_{H,t+1}.$$

同様に、(151)、(152)、(153) 式より、

$$\hat{\pi}^*_{F,t} = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left(\hat{\mu}^*_t - \hat{p}^*_{F,t}\right) + \beta \mathrm{E}_t \hat{\pi}^*_{F,t+1}.$$

(160)、(161)、(162) 式より、

$$\hat{\pi}^*_{H,t} = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left(\hat{\mu}_t - \hat{p}^*_{H,t} - \hat{e}_t\right) + \beta \mathrm{E}_t \hat{\pi}^*_{H,t+1}.$$

(163)、(164)、(165) 式より、

$$\hat{\pi}_{F,t} = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left(\hat{\mu}^*_t - \hat{p}_{F,t} + \hat{e}_t\right) + \beta \mathrm{E}_t \hat{\pi}_{F,t+1}$$

が導出できる。

伸縮価格化の産出量とアウトプット・ギャップ　ここで、価格が伸縮的、すなわち、$\theta = 0$ で常に望ましい価格を企業が設定できる時の産出量を定義する。この伸縮価格（すなわち、効率的な経済）下の産出量（$\check{Y}_t$、$\check{Y}^*_t$）は、上記のトレンド除去後のモデルを $\theta = 1$ の下で解くことによって求まる：

$$\check{Y}_t = \left[\frac{\varepsilon - 1}{\chi\varepsilon(1-\tau)} Z_t^{1+\omega} \check{Y}_t^{*-.5(\sigma-1)}\right]^{\frac{1}{.5\sigma+.5+\omega}}, \tag{166}$$

$$\check{Y}^*_t = \left[\frac{\varepsilon - 1}{\chi\varepsilon(1-\tau)} Z_t^{*1+\omega} \check{Y}_t^{-.5(\sigma-1)}\right]^{\frac{1}{.5\sigma+.5n+\omega}}.$$

これを定常状態からの対数でみた階差で表現すると、

$$\bar{Y}_t = \frac{1}{2}\frac{\sigma+1+2\omega}{\sigma+\omega}\hat{Z}_t - \frac{1}{2}\frac{\sigma-1}{\sigma+\omega}\hat{Z}^*_t,$$

$$\bar{Y}^*_t = \frac{1}{2}\frac{\sigma+1+2\omega}{\sigma+\omega}\hat{Z}^*_t - \frac{1}{2}\frac{\sigma-1}{\sigma+\omega}\hat{Z}_t.$$

となる。ここで、アウトプット・ギャップを、実際の産出量の伸縮価格下の産出量からの%乖離として定義する：

$$\hat{x}_t \equiv \hat{Y}_t - \bar{Y}_t,$$

and

$$\hat{x}^*_t \equiv \hat{Y}^*_t - \bar{Y}^*_t.$$

PCP モデル　(6)、(14) 式より、

$$\frac{S_t P^*_t}{P_t} = \frac{S_t \left(P^*_{H,t}\right)^{.5}\left(P^*_{F,t}\right)^{.5}}{\left(P^*_{H,t}\right)^{.5}\left(P^*_{F,t}\right)^{.5}} = \left(\frac{S_t P^*_{H,t}}{P_{H,t}}\right)^{.5}\left(\frac{S_t P^*_{F,t}}{P_{F,t}}\right)^{.5} = 1$$

となるため、

$$\hat{e}_t = 0 \tag{167}$$

となる。さらに、この（167）式と、(130)、(131)、(134)、(135)、(136)、(137)、(139)、(147）式より、

$$\hat{p}_{H,t} = \frac{1}{2}\left(\hat{Y}_t^* - \hat{Y}_t\right), \tag{168}$$

$$\hat{p}_{F,t}^* = \frac{1}{2}\left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^*\right) \tag{169}$$

が導出できる。

$$\hat{p}_{H,t} = \log\left(\frac{P_{H,t}}{P_t}\right) - \log(1) = \log\left(\frac{P_{H,t}^{.5}}{P_{F,t}^{.5}}\right) = \log\left(\frac{S_t P_{H,t}^*}{P_{F,t}}\right)^{.5},$$

$$\hat{p}_{F,t}^* = \log\left(\frac{P_{F,t}}{S_t P_{H,t}^*}\right)^{.5}$$

となるため、(168)、(169）式は、PCP の下では、交易条件が両国間の産出量の比率によって表現されることを意味している。

（167)、(168)、(169）式が成立することに注意しながら、式の代入を行うと、PCP 下の対数線形近似モデル（除く金融政策ルール）として、以下の 4 式を導出できる：

$$\frac{\sigma+1}{2}\hat{x}_t + \frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t^* = \frac{\sigma+1}{2}\hat{x}_{t+1} + \frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_{t+1}^* - \left(\hat{\imath}_t - \mathrm{E}_t\hat{\pi}_{H,t+1} - r_{H,t}^n\right),$$

$$\frac{\sigma+1}{2}\hat{x}_t^* + \frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t = \frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_{t+1} + \frac{\sigma+1}{2}\hat{x}_{t+1}^* - \left(\hat{\imath}_t^* - \mathrm{E}_t\hat{\pi}_{F,t+1}^* - r_{F,t}^n\right),$$

$$\tilde{\pi}_{H,t} = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left(\frac{2\omega+\sigma+1}{2}\hat{x}_t + \frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t^*\right) + \beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{H,t+1},$$

$$\tilde{\pi}_{F,t}^* = \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left(\frac{2\omega+\sigma+1}{2}\hat{x}_t^* + \frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t\right) + \beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{F,t+1}^*.$$

なお、$r_{H,t}^n$（$r_{F,t}^n$）は、それぞれ、自国（外国）の生産者物価でデフレートされた自然利子率を示す：

$$\begin{aligned} r_{H,t}^n &= \frac{\sigma+1}{2}\left(\bar{Y}_{t+1} - \bar{Y}_t\right) + \frac{\sigma-1}{2}\left(\bar{Y}_{t+1}^* - \bar{Y}_t^*\right) \\ &= \frac{[2\sigma + (\sigma+1)\omega]\left(\hat{Z}_{t+1} - \hat{Z}_t\right) + \omega(\sigma-1)\left(\hat{Z}_{t+1}^* - \hat{Z}_t^*\right)}{2(\sigma+\omega)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{F,t}^n &= \frac{\sigma+1}{2}\left(\bar{Y}_{t+1}^* - \bar{Y}_t^*\right) + \frac{\sigma-1}{2}\left(\bar{Y}_{t+1} - \bar{Y}_t\right) \\ &= \frac{[2\sigma + (\sigma+1)\omega]\left(\hat{Z}_{t+1}^* - \hat{Z}_t^*\right) + \omega(\sigma-1)\left(\hat{Z}_{t+1} - \hat{Z}_t\right)}{2(\sigma+\omega)}. \end{aligned}$$

LCP モデル　LCP 下では、一物一価が成り立たないため、実質為替相場が変化する。この結果、モデルは、以下の 7 式と自国と外国の金融政策ルールで構成される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\hat{x}_t + \hat{x}_t^*\right) &= -\frac{1}{\sigma}\left[\hat{\imath}_t - \frac{1}{2}\mathrm{E}_t\left(\hat{\pi}_{H,t+1} + \hat{\pi}_{F,t+1}\right)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{E}_t\left(\hat{x}_{t+1} + \hat{x}_{t+1}^*\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma}\left(\hat{e}_{t+1} - \hat{e}_t\right) + \frac{1}{2}\frac{1+\omega}{\sigma+\omega}\left(\hat{Z}_{t+1} + \hat{Z}_{t+1}^* - \hat{Z}_t - \hat{Z}_t^*\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\hat{x}_t+\hat{x}_t^*\right) &= -\frac{1}{\sigma}\left[\hat{\imath}_t^*-\frac{1}{2}\mathrm{E}_t\left(\hat{\pi}_{H,t+1}^*+\hat{\pi}_{F,t+1}^*\right)\right]+\frac{1}{2}\mathrm{E}_t\left(\hat{x}_{t+1}+\hat{x}_{t+1}^*\right)\\
&\quad -\frac{1}{2\sigma}\left(\hat{e}_{t+1}-\hat{e}_t\right)+\frac{1}{2}\frac{1+\omega}{\sigma+\omega}\left(\hat{Z}_{t+1}+\hat{Z}_{t+1}^*-\hat{Z}_t-\hat{Z}_t^*\right),\\
\hat{\pi}_{H,t} &= \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left[\left(\omega+\frac{1+\sigma}{2}\right)\hat{x}_t+\frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t^*+\frac{1}{2}\hat{e}_t\right]+\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{H,t+1},\\
\hat{\pi}_{H,t}^* &= \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left[\left(\omega+\frac{\sigma+1}{2}\right)\hat{x}_t+\frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t^*-\frac{1}{2}\hat{e}_t\right]+\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{H,t+1}^*,\\
\hat{\pi}_{F,t}^* &= \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left[\left(\omega+\frac{\sigma+1}{2}\right)\hat{x}_t^*+\frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t-\frac{1}{2}\hat{e}_t\right]+\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{F,t+1}^*,\\
\hat{\pi}_{F,t} &= \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta}\left[\left(\omega+\frac{\sigma+1}{2}\right)\hat{x}_t^*+\frac{\sigma-1}{2}\hat{x}_t+\frac{1}{2}\hat{e}_t\right]+\beta\mathrm{E}_t\hat{\pi}_{F,t+1},\\
\hat{\pi}_{H,t}-\hat{\pi}_{F,t} &= \left(\hat{Z}_{t-1}-\hat{Z}_{t-1}^*\right)-\left(\hat{Z}_t-\hat{Z}_t^*\right)+\left(\hat{x}_t^*-\hat{x}_t\right)-\left(\hat{x}_{t-1}^*-\hat{x}_{t-1}\right).
\end{aligned}
$$

5 社会損失関数の導出

まず、国際協調の下での損失関数を導出する。次に、PCP については、ナッシュ均衡下、すなわち、国際非協調下で、それぞれの国が最小化を試みる 2 次の損失関数を導出する。2 次の損失関数を導出すると、線形の制約の下では、最適政策が線形となるため、その性質の分析が容易になる。なお、ここでの損失関数の導出は、主に、Engel (2009) をフォローした。

5.1 国際協調

両国の中央銀行は、協調して、以下で示される世界全体の効用

$$
\Omega_t=\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}-\chi\frac{h_t^{1+\omega}}{1+\omega}+\frac{C_t^{*1-\sigma}}{1-\sigma}-\chi\frac{h_t^{*1+\omega}}{1+\omega}
$$

を最大化するように金融政策を決定する。上記の世界全体の効用を、2 次のテイラー近似を行うと、

$$
\begin{aligned}
\Omega_t \approx &\frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}+C^{-\sigma}\left(C_t-C\right)+\frac{-\sigma}{2}C^{-\sigma-1}\left(C_t-C\right)^2\\
&-\chi\frac{h^{1+\omega}}{1+\omega}-\chi h^{\omega}\left(h_t-h\right)-\frac{1}{2}\chi\omega h^{\omega-1}\left(h_t-h\right)^2\\
&+\frac{C^{*1-\sigma}}{1-\sigma}+C^{*-\sigma}\left(C_t^*-C^*\right)+\frac{-\sigma}{2}C^{*-\sigma-1}\left(C_t^*-C^*\right)^2\\
&-\chi\frac{h^{*1+\omega}}{1+\omega}-\chi h^{*\omega}\left(h_t^*-h^*\right)-\frac{1}{2}\chi\omega h^{*\omega-1}\left(h_t^*-h^*\right)^2
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\log\left(\Gamma_t\right) &\approx \log\left(\Gamma\right)+\frac{1}{\Gamma 1!}\left(\Gamma_t-\Gamma\right)-\frac{1}{\Gamma^2 2!}\left(\Gamma_t-\Gamma\right)^2\\
&=\log\left(\Gamma\right)+\hat{\gamma}_t-\frac{1}{2!}\left(\hat{\gamma}_t\right)^2
\end{aligned}
$$

から、

$$\frac{\Gamma_t - \Gamma}{\Gamma} \approx \left(\hat{\Gamma}_t + \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_t^2\right)$$

という関係を用いると、

$$\begin{aligned}\Omega_t \approx & \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} + C^{1-\sigma}\left(\hat{C}_t + \frac{1}{2}\hat{C}_t^2\right) + \frac{-\sigma}{2}C^{1-\sigma}\left(\hat{C}_t + \frac{1}{2}\hat{C}_t^2\right)^2 \\ & - \chi\frac{h^{1+\omega}}{1+\omega} - \chi h^{1+\omega}\left(\hat{h}_t + \frac{1}{2}\hat{h}_t^2\right) - \frac{1}{2}\chi\omega h^{1+\omega}\left(\hat{h}_t + \frac{1}{2}\hat{h}_t^2\right)^2 \\ & + \frac{C^{*1-\sigma}}{1-\sigma} + C^{*1-\sigma}\left(\hat{C}_t^* + \frac{1}{2}\hat{C}_t^{*2}\right) + \frac{-\sigma}{2}C^{*1-\sigma}\left(\hat{C}_t^* + \frac{1}{2}\hat{C}_t^{*2}\right)^2 \\ & - \chi\frac{h^{*1+\omega}}{1+\omega} - \chi h^{*1+\omega}\left(\hat{h}_t^* + \frac{1}{2}\hat{h}_t^{*2}\right) - \frac{1}{2}\chi\omega h^{*1+\omega}\left(\hat{h}_t^* + \frac{1}{2}\hat{h}_t^{*2}\right)^2\end{aligned}$$

となる。ここで、(**??**) 式より、

$$C^{1-\sigma} = C^{*1-\sigma} = \chi h^{1+\omega} = \chi h^{*1+\omega}$$

となるほか、本モデルでは、金融政策で影響の及ぼすことができないことが仮定されている定常状態の値と 2 次以上の項を無視し、という関係を用いると、世界全体の効用は、

$$\begin{aligned}\Omega_t \approx & \hat{C}_t + \hat{C}_t^* - \hat{h}_t - \hat{h}_t^* \\ & + \frac{1-\sigma}{2}\hat{C}_t^2 + \frac{1-\sigma}{2}\hat{C}_t^{*2} - \frac{1+\omega}{2}\hat{h}_t^2 - \frac{1+\omega}{2}\hat{h}_t^{*2}\end{aligned}$$

となる。なお、価格の粘着性が存在しない効率的な経済の下では、すなわち、達成できる最大の効用は、以下で定義される：

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_t \approx & \bar{C}_t + \bar{C}_t^* - \bar{h}_t - \bar{h}_t^* \\ & + \frac{1-\sigma}{2}\bar{C}_t^2 + \frac{1-\sigma}{2}\bar{C}_t^{*2} - \frac{1+\omega}{2}\bar{h}_t^2 - \frac{1+\omega}{2}\bar{h}_t^{*2}.\end{aligned}$$

なお、ここで、効率的な経済からの乖離を

$$\tilde{\Gamma}_t = \hat{\Gamma}_t - \bar{\Gamma}_t$$

として表現すると、

$$\begin{aligned}\Omega_t \approx & \bar{C}_t + \bar{C}_t^* - \bar{h}_t - \bar{h}_t^* + \frac{1-\sigma}{2}\left(\bar{C}_t^2 + \bar{C}_t^{*2}\right) - \frac{1+\omega}{2}\left(\bar{h}_t^2 - \bar{h}_t^{*2}\right) \\ & + \tilde{C}_t + \tilde{C}_t^* - \tilde{h}_t - \tilde{h}_t^* \\ & + \frac{1-\sigma}{2}\left(\tilde{C}_t^2 + 2\tilde{C}_t\bar{C}_t + \tilde{C}_t^{*2} + 2\tilde{C}_t^*\bar{C}_t^*\right) \\ & - \frac{1+\omega}{2}\left(\tilde{h}_t^2 + 2\tilde{h}_t\bar{h}_t + \tilde{h}_t^{*2} + 2\tilde{h}_t^*\bar{h}_t^*\right)\end{aligned}$$

となる。効率的な経済においては、政策で厚生を改善する余地がないため、中央銀行は、金融政策により、以下で定義される世界効用：

$$\begin{aligned}\Omega_t \approx & \tilde{C}_t + \tilde{C}_t^* - \tilde{h}_t - \tilde{h}_t^* \\ & + \frac{1-\sigma}{2}\left(\tilde{C}_t^2 + 2\tilde{C}_t\bar{C}_t + \tilde{C}_t^{*2} + 2\tilde{C}_t^*\bar{C}_t^*\right) \\ & - \frac{1+\omega}{2}\left(\tilde{h}_t^2 + 2\tilde{h}_t\bar{h}_t + \tilde{h}_t^{*2} + 2\tilde{h}_t^*\bar{h}_t^*\right).\end{aligned}$$

の最大化を試みる。ここで、導出のわかりやすさのため、1 次と 2 次の項を分けて、すなわち、

$$\Omega_t = \Omega_t^1 + \Omega_t^2, \tag{170}$$

$$\Omega_t^1 = \tilde{C}_t + \tilde{C}_t^* - \tilde{h}_t - \tilde{h}_t^*, \tag{171}$$

$$\Omega_t^2 = \frac{1-\sigma}{2}\left(\tilde{C}_t^2 + 2\tilde{C}_t\bar{C}_t + \tilde{C}_t^{*2} + 2\tilde{C}_t^*\bar{C}_t^*\right) - \frac{1+\omega}{2}\left(\tilde{h}_t^2 + 2\tilde{h}_t\bar{h}_t + \tilde{h}_t^{*2} + 2\tilde{h}_t^*\bar{h}_t^*\right) \tag{172}$$

つぃて、効用の 2 次近似を試みる。なお、この分解からもわかるように、ポイントは、1 次の項、すなわち、W_t^1 をいかにして 2 次関数で表現するかにある (Kim and Kim, 2002?)。なお、PCP 下の損失関数は、LCP 下の損失関数の特殊型とみなすことができるため、以下では、まず、LCP 下の損失関数を導出する。

（130)、(131)、(134)、(135)、(136)、(137)、(139)、(147)（167）式より、

$$\hat{C}_t = \frac{1}{2}\hat{Y}_t + \frac{1}{2}\hat{Y}_t^* + \frac{1}{2\sigma}\hat{e}_t, \tag{173}$$

$$\hat{C}_t^* = \frac{1}{2}\hat{Y}_t^* + \frac{1}{2}\hat{Y}_t - \frac{1}{2\sigma}\hat{e}_t \tag{174}$$

が導出できる。一方、伸縮価格下では、

$$\bar{C}_t = \frac{1}{2}\bar{Y}_t + \frac{1}{2}\bar{Y}_t^*, \tag{175}$$

$$\bar{C}_t^* = \frac{1}{2}\bar{Y}_t^* + \frac{1}{2}\bar{Y}_t \tag{176}$$

が成立する。この結果、

$$\tilde{C}_t = \frac{1}{2}\tilde{Y}_t + \frac{1}{2}\tilde{Y}_t^* + \frac{1}{2\sigma}\hat{e}_t, \tag{177}$$

$$\tilde{C}_t^* = \frac{1}{2}\tilde{Y}_t^* + \frac{1}{2}\tilde{Y}_t - \frac{1}{2\sigma}\hat{e}_t \tag{178}$$

となる。ここで、伸縮価格下のモデルを定常状態からの乖離で表現すると、

$$\omega\bar{h}_t = -\sigma\bar{C}_t + \bar{w}_t,$$

$$0 = \overline{mc}_t - \bar{p}_{H,t},$$

$$\overline{mc}_t = \bar{w}_t - \hat{Z}_t,$$

$$\bar{Y}_t = \widehat{Z}_t + \bar{h}_t,$$

$$\omega\bar{h}_t^* = -\sigma\bar{C}_t^* + \bar{w}_t^*,$$

$$0 = \overline{mc}_t^* - \bar{p}_{F,t}^*,$$

$$\overline{mc}_t^* = \bar{w}_t^* - \hat{Z}_t^*,$$

$$\bar{Y}_t^* = \hat{Z}_t^* + \bar{h}_t^*$$

となるため、

$$\bar{h}_t = \frac{1}{2}\frac{1-\sigma}{1+\omega}\left(\bar{Y}_t + \bar{Y}_t^*\right), \tag{179}$$

$$\bar{h}_t^* = \frac{1}{2}\frac{1-\sigma}{1+\omega}\left(\bar{Y}_t + \bar{Y}_t^*\right) \tag{180}$$

が導出できる。また、(140)、(148) 式より、

$$\tilde{h}_t = \tilde{Y}_t, \tag{181}$$

$$\tilde{h}_t^* = \tilde{Y}_t^* \tag{182}$$

となる。2 次の項については、(172) 式に、(175) から (182) 式を代入すると、

$$\Omega_t^2 = \frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{Y}_t^2 + \tilde{Y}_t\tilde{Y}_t^* + \frac{1}{2}\tilde{Y}_t^{*2} + \frac{\hat{e}_t^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{1+\omega}{2}\left(\tilde{Y}_t^2 + \tilde{Y}_t^{*2}\right)$$

となる。

次に、1 次の項、すなわち、(171) 式について、構造方程式を 2 次近似することによって、2 次の関数で表現することを試みる。(88)、(89)、(93)、(94)、(96)、(98) 式より、

$$Y_t = \frac{1}{2}\Delta_{H,t}T_t^{0.5}C_t + \frac{1}{2}\Delta_{H,t}^*T_t^{*-0.5}C_t^*, \tag{183}$$

$$Y_t^* = \frac{1}{2}\Delta_{F,t}T_t^{-0.5}C_t + \frac{1}{2}\Delta_{F,t}^*T_t^{*0.5}C_t^* \tag{184}$$

が導出できる。なお、

$$T_t \equiv \frac{P_{H,t}}{P_{F,t}},$$

$$T_t^* \equiv \frac{P_{H,t}^*}{P_{F,t}^*}$$

と定義する。なお、伸縮価格下では、(168)、(169) からもわかるように、

$$-\frac{1}{2}\bar{T}_t = \bar{p}_{H,t},$$

$$\frac{1}{2}\bar{T}_t = \bar{p}_{F,t}^*,$$

$$\bar{T}_t = \bar{Y}_t - \bar{Y}_t^* \tag{185}$$

が成立する。まず、(183) 式について、2 次のテイラー展開を行う。この結果、

$$\begin{aligned}
&\hat{Y}_t + \frac{1}{2}\hat{Y}_t^2 \\
&= \frac{1}{2}\hat{C}_t + \frac{1}{2}\hat{C}_t^* + \frac{1}{4}\hat{T}_t - \frac{1}{4}\hat{T}_t^* \\
&+ \frac{1}{4}\hat{C}_t^2 + \frac{1}{4}\hat{C}_t^{*2} + \frac{1}{8}\hat{T}_t^2 \\
&+ \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{C}_t - \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{C}_t^* \\
&+ \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{H,t} + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{H,t}^2 + \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{\Delta}_{H,t} + \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{H,t}^* + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{H,t}^{*2} - \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{\Delta}_{H,t}^*
\end{aligned}$$

が導出できる。なお、導出に当たっては、3 次以上の項を無視したほか、定常状態における

$$C = C^* = Y$$

と、(131) と (136) 式から導かれる

$$\hat{T}_t^{*2} = \hat{T}_t^2$$

の関係を用いた。(184) 式についても、同様に、

$$
\begin{aligned}
&\hat{Y}_t^* + \frac{1}{2}\hat{Y}_t^{*2} \\
&= \frac{1}{2}\hat{C}_t + \frac{1}{2}\hat{C}_t^* - \frac{1}{4}\hat{T}_t + \frac{1}{4}\hat{T}_t^* \\
&+ \frac{1}{4}\hat{C}_t^2 + \frac{1}{4}\hat{C}_t^{*2} + \frac{1}{8}\hat{T}_t^2 \\
&- \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{C}_t + \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{C}_t^* \\
&+ \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{F,t} + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{F,t}^2 - \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{\Delta}_{F,t} + \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{F,t}^* + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{F,t}^{*2} + \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{\Delta}_{F,t}^*
\end{aligned}
$$

となる。さらに、(140)、(148)、(173)、(174)、(185) 式を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&\hat{h}_t + \hat{Z}_t + \hat{h}_t^* + \hat{Z}_t^* \\
&= \hat{C}_t + \hat{C}_t^* + \frac{1}{4}\frac{1}{\sigma^2}\hat{e}_t^2 \\
&+ \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{H,t} + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{H,t}^2 + \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{\Delta}_{H,t} + \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{H,t}^* + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{H,t}^{*2} - \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{\Delta}_{H,t}^* \\
&+ \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{F,t} + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{F,t}^2 - \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{\Delta}_{F,t} + \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{F,t}^* + \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{F,t}^{*2} + \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{\Delta}_{F,t}^*
\end{aligned}
$$

が導出できる。一方、伸縮価格下の効率的経済では、世界全体の資源制約として、

$$\bar{C}_t + \bar{C}_t^* = \bar{h}_t + \bar{h}_t^* + \hat{Z}_t + \hat{Z}_t^*$$

が成り立つことから、さらに、

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}_t + \tilde{C}_t^* - \tilde{h}_t + \tilde{h}_t^* \\
&= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma^2}\hat{e}_t^2 \\
&- \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{H,t} - \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{H,t}^2 - \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{\Delta}_{H,t} - \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{H,t}^* - \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{H,t}^{*2} + \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{\Delta}_{H,t}^* \\
&- \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{F,t} - \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{F,t}^2 + \frac{1}{4}\hat{T}_t\hat{\Delta}_{F,t} - \frac{1}{2}\hat{\Delta}_{F,t}^* - \frac{1}{4}\hat{\Delta}_{F,t}^{*2} - \frac{1}{4}\hat{T}_t^*\hat{\Delta}_{F,t}^*
\end{aligned}
\tag{186}
$$

と書き換えることができる。後は、物価変動に伴う資源損失に関する項をどのようにして、2 次関数で表現し、さらに、わかりやすい形にするかということになる。この点、

$$\Delta_{H,t} = \int_0^1 \left[\frac{P_{H,t}(j)}{P_{H,t}}\right]^{-\varepsilon} \mathrm{d}j = \int_0^1 p_{H,t}(j)^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}j$$

を 2 次近似することになるが、Gali (2008) に倣い、まず、$p_{H,t}(j)^{1-\varepsilon}$ の 2 次近似を試みる。

$$
\begin{aligned}
p_{H,t}(j)^{1-\varepsilon} &= \exp\left[(1-\varepsilon)\,\hat{p}_{H,t}(j)\right] \\
&\approx 1 + (1-\varepsilon)\,\hat{p}_{H,t}(j) + \frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\hat{p}_{H,t}(j)^2
\end{aligned}
$$

となるため、両辺について積分を取ると、

$$\int_0^1 p_{H,t}(j)^{1-\varepsilon}\,\mathrm{d}j \approx 1 + (1-\varepsilon)\int_0^1 \hat{p}_{H,t}(j)\,\mathrm{d}j + \frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\int_0^1 \hat{p}_{H,t}(j)^2\,\mathrm{d}j$$

となる。ここで、(50) 式に示されるような、物価指数の定義から、

$$\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right]=\int_0^1 \hat{p}_{H,t}(j)\,\mathrm{d}j,$$

$$\int_0^1 \hat{p}_{H,t}(j)^2\,\mathrm{d}j=\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)^2\right]$$

と定義すると、

$$\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right]=\frac{\varepsilon-1}{2}\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)^2\right]$$

が導出できる。ここで、$p_{H,t}(j)^{-\varepsilon}$ の 2 次近似を試みると、

$$p_{H,t}(j)^{-\varepsilon}\approx 1-\varepsilon\int_0^1 \hat{p}_{H,t}(j)\,\mathrm{d}j+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 \hat{p}_{H,t}(j)^2\,\mathrm{d}j$$

となる。この結果、

$$\begin{aligned}\Delta_{H,t}&=\int_0^1 p_{H,t}(j)^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}j\\&\approx 1-\varepsilon\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right]+\frac{\varepsilon^2}{2}\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)^2\right]\\&=1-\frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{2}\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)^2\right]+\frac{\varepsilon^2}{2}\mathrm{E}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)^2\right]\\&=1+\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{var}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)^2\right]\end{aligned}$$

となることから、

$$\hat{\Delta}_{H,t}\approx\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{var}_j\left[\hat{p}_{H,t}(j)^2\right]=\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P_H,t} \tag{187}$$

が導出できる。同様に、

$$\hat{\Delta}^*_{H,t}=\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P^*_H,t}, \tag{188}$$

$$\hat{\Delta}_{F,t}=\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P_F,t}, \tag{189}$$

$$\hat{\Delta}^*_{F,t}=\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P^*_F,t} \tag{190}$$

と物価の分散に変更することができる。(186)、(187)、(188)、(189)、(190) 式を (171) 式に代入すると、(170) 式は

$$\begin{aligned}\Omega_t=&-\frac{\sigma}{4}\frac{\hat{e}_t^2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P_H,t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P^*_H,t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P_F,t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\sigma^2_{P^*_F,t}\right)\\&+\frac{1-\sigma}{4}\left(\hat{x}_t-\hat{x}_t^*\right)^2-\frac{\sigma+\omega}{2}\left(\hat{x}_t^2+\hat{x}_t^{*2}\right)\end{aligned}$$

として表現されることとなる。上記は、世界全体の効用であるため、中央銀行が最大化を試みるものであるが、わかりやすさのため、中央銀行が最小化を試みる損失関数として考えると、

$$\begin{aligned}L_t^{LCP}=&\frac{\sigma+\omega}{2}\left(\hat{x}_t^2+\hat{x}_t^{*2}\right)-\frac{1-\sigma}{4}\left(\hat{x}_t-\hat{x}_t^*\right)^2\\&+\frac{\sigma}{4}\frac{\hat{e}_t^2}{\sigma^2}+\frac{\varepsilon}{4}\sigma^2_{P_H,t}+\frac{\varepsilon}{4}\sigma^2_{P^*_H,t}+\frac{\varepsilon}{4}\sigma^2_{P_F,t}+\frac{\varepsilon}{4}\sigma^2_{P^*_F,t}\end{aligned}$$

が導出できる。Calvo (1983) 型の価格粘着性の下では、Woodford (2003) が示したように、

$$E_j \log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right] = 0,$$

であることから、

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{P_H,t} &= \mathrm{var}\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right] = \mathrm{var}_{\mathrm{j}}\ \{\log\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right] - \log(1)\} \\
&= \mathrm{var}_{\mathrm{j}}\ \{\log\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right] - \mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right]\} \\
&= \mathrm{E}_j \{\log\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right] - \mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right]\}^2 \\
&- \{\mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right] - \mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right]\}^2 \\
&= \alpha \mathrm{E}_j \{\log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right] - \mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right]\}^2 \\
&+ (1-\alpha)\,\mathrm{var}\{\log(\hat{\mathsf{p}}_t) - \mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right]\}^2 \\
&- \{\mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t}(j)\right] - \mathrm{E}_j \log\left[\hat{p}_{H,t-1}(j)\right]\}^2 \\
&= \alpha \sigma^2_{P_H,t-1} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\hat{\pi}^2_{H,t}.
\end{aligned}$$

となるため、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \sigma^2_{P_H,t+j} = \frac{\theta}{(1-\theta)(1-\theta\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \hat{\pi}_{H,t+j}$$

が成り立つ。こうして、以下の LCP 下での損失関数が導出できる。

$$\begin{aligned}
L_t^{LCP} &= \frac{\sigma+\omega}{2}\left(\hat{x}_t^2 + \hat{x}_t^{*2}\right) + \frac{\sigma}{4}\frac{\hat{e}_t^2}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon}{4}\frac{\theta}{(1-\theta)(1-\theta\beta)}\left(\hat{\pi}^2_{H,t} + \hat{\pi}^2_{F,t} + \hat{\pi}^{*2}_{H,t} + \hat{\pi}^{*2}_{F,t}\right) \\
&- \frac{1-\sigma}{4}\left(\hat{x}_t - \hat{x}_t^*\right)^2.
\end{aligned} \tag{191}$$

一方、PCP 下では、(131)、(136)、(154) から (159) 式より、

$$\hat{\pi}_{H,t} + \hat{\pi}^*_{F,t} = \hat{\pi}_{F,t} + \hat{\pi}^*_{H,t}$$

が導出できる。このため、

$$\begin{aligned}
&\hat{\pi}^2_{H,t} + \hat{\pi}^{*2}_{F,t} + \hat{\pi}^2_{F,t} + \hat{\pi}^{*2}_{H,t} \\
&= 2\left(\hat{\pi}^2_{H,t} + \hat{\pi}^{*2}_{F,t} + \hat{\pi}_{H,t}\hat{\pi}^*_{F,t} - \hat{\pi}_{F,t}\hat{\pi}^*_{H,t}\right) \\
&= 2\hat{\pi}^2_{H,t} + 2\hat{\pi}^{*2}_{F,t} + 2\hat{\pi}_{H,t}\left(\hat{\pi}^*_{F,t} - \hat{\pi}_{F,t}\frac{\hat{\pi}^*_{H,t}}{\hat{\pi}_{H,t}}\right) \\
&= 2\hat{\pi}^2_{H,t} + 2\hat{\pi}^{*2}_{F,t} + 2\hat{\pi}_{H,t}\left[\log\left(\frac{P^*_{F,t}}{P^*_{F,t-1}}\right) - \log\left(\frac{P_{F,t}}{P_{F,t-1}}\right) - \log\left(\frac{P^*_{H,t}}{P^*_{H,t-1}}\right) + \log\left(\frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t}}\right)\right] \\
&= 2\hat{\pi}^2_{H,t} + 2\hat{\pi}^{*2}_{F,t} + 2\hat{\pi}_{H,t}\left[\log\left(\frac{P^*_{F,t}}{P^*_{F,t-1}}\right) - \log\left(\frac{S_{t-1}P_{F,t}}{S_tP_{F,t-1}}\right)\right] \\
&= 2\hat{\pi}^2_{H,t} + 2\hat{\pi}^{*2}_{F,t}
\end{aligned}$$

となる。この結果、PCP 下の損失関数は、以下で表現される：

$$L_t^{PCP} = \frac{\sigma+\omega}{2}\left(\hat{x}_t^2 + \hat{x}_t^{*2}\right) - \frac{1-\sigma}{4}\left(\hat{x}_t - \hat{x}_t^*\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\theta}{(1-\theta)(1-\theta\beta)}\left(\pi^2_{H,t} + \pi^{*2}_{F,t}\right). \tag{192}$$

(**??**) 式と (192) 式は、いずれも、物価 (インフレ率) と産出量ギャップ、すなわち、産出量の安定が重要であることを示唆している。しかし、LCP のケースでは、これらの目的だけでなく、(実質) 為替相場の安定も、

金融政策の目的となってくる。LCP の下では、為替相場変動が必ずしも価格に反映されていない。ニュー・ケインジアン・モデルでは、価格の粘着性があるもとでは、たとえ、すべての企業が同じような製品を製造していても、インフレ率の変動が価格のばらつきを生じさせてしまう。この結果、これが産出量水準についての企業間のばらつきを生み、ある企業が過剰に生産し、ある企業が過少生産してしまうような状況に陥ってしまうため、経済厚生が低下する。ミクロ経済学的に解釈すると、価格の粘着性から、限界代替率と限界変形率が一致しなくなってしまう。これと同じようなメカニズムが、LCP の下では発生するため、為替相場を安定させることが金融政策協調にとって重要となってくる。

6 まとめ

本稿では、国際マクロ経済学において、基本的な分析ツールとなっている「新しい開放マクロ経済学」モデルについて、これまでの代表的な研究のエッセンスを紹介するとともに、モデルの導出の詳細を示してきた。ここでは、金融政策の国際協調のケースのみを考えてきたが、政策当局が、自国の利益を最大化するようなゲーム的な状況の方が、現実経済をより描写できている可能性がある。非協調のケースの分析は、いまだ発展途上であるが、PCP のケースについては、Benigno and Benigno (2006) によって、2 次の損失関数が導出されている。Benigno and Benigno (2006) は、非協調の問題を、Benigno and Woodford (2005) によって提唱された均衡条件をも用いた線形 2 次近似法を用いているため、計算過程が非常に煩雑なものとなっている。導出も含めて、直観的な理解ができるような非協調金融政策の枠組みを考えることは、国際金融論の分野において、大きな一つの課題となっている。

参考文献

[1] Benigno, Gianluca and Benigno, Pierpaolo, 2006. "Designing targeting rules for international monetary policy cooperation," Journal of Monetary Economics, Elsevier, vol. 53(3), pages 473-506.

[2] Benigno, Pierpaolo, and Woodford, Michael, 2005. "Inflation Stabilization And Welfare: The Case Of A Distorted Steady State," Journal of the European Economic Association, MIT Press, vol. 3(6), pages 1185-1236, December.

[3] Calvo, Guillermo A., 1983. "Staggered prices in a utility-maximizing framework," Journal of Monetary Economics, Elsevier, vol. 12(3), pages 383-398.

[4] Clarida, Richard, Gali, Jordi and Gertler, Mark, 2002. "A simple framework for international monetary policy analysis," Journal of Monetary Economics, Elsevier, vol. 49(5), pages 879-904.

[5] Corsetti, Giancarlo and Pesenti, Paolo, 2001. "Welfare And Macroeconomic Interdependence," The Quarterly Journal of Economics, MIT Press, vol. 116(2), pages 421-445.

[6] Corsetti, Giancarlo and Pesenti, Paolo, 2005. "International dimensions of optimal monetary policy," Journal of Monetary Economics, Elsevier, vol. 52(2), pages 281-305.

[7] Corsetti, Giancarlo and Pesenti, Paolo, 2005. "The Simple Geometry of Transmission and Stabilization in Closed and Open Economies," Staff Reports 209, Federal Reserve Bank of New York.

[8] Corsetti, Giancarlo and Pesenti, Paolo, 2009. "The Simple Geometry of Transmission and Stabilization in Closed and Open Economies," NBER Chapters, in: NBER International Seminar on Macroeconomics 2007, pages 65-116 National Bureau of Economic Research, Inc.

[9] Engel, Charles, 2011. "Currency Misalignments and Optimal Monetary Policy: A Reexamination," American Economic Review, American Economic Association, vol. 101(6), pages 2796-2822.

[10] Obstfeld, Maurice and Rogoff, Kenneth, 1995. "Exchange Rate Dynamics Redux," Journal of Political Economy, University of Chicago Press, vol. 103(3), pages 624-60.